Problem solving e argomentazione matematica

Pietro Di Martino
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa

Sunto / *Problem solving* e *argomentazione* sono competenze fondamentali che l'educazione matematica dovrebbe contribuire a sviluppare. La promozione di un approccio per problemi e all'argomentazione in matematica è non a caso un obiettivo educativo di molti standard internazionali. A partire da una sperimentazione condotta sulle prove INVALSI del primo ciclo, discuteremo di come l'attenzione al problem solving e ai processi argomentativi in classe non sia solo un'occasione di formazione per gli allievi, ma un importante strumento per gli insegnanti per meglio interpretare eventuali difficoltà dei propri allievi.

Parole chiave: argomentazione; problem solving; didattica della matematica; processi di pensiero.

Abstract / *Problem solving* and *argumentation* are key-competencies in education. The mathematical education at school should give a strong contribution to the development of these competences. The promotion of problem solving and argumentation in mathematics is shared by several international standards. In this contribution, we will describe a project on problem solving and argumentation in primary and middle school, and we will underline that students' argumentation in mathematical context is an important interpretative tool for teachers.

Keywords: argumentation; problem solving; mathematics education; thought processes.

1 L'importanza di problem solving e argomentazione nell'insegnamento della matematica

Con quale obiettivo (o obiettivi) insegnare matematica ad uno specifico livello scolare? La risposta che ogni insegnante si dà dovrebbe guidare le sue scelte didattiche. L'impressione è che l'insegnante – preso da incombenze, impegni e preoccupazioni più a breve termine – trovi raramente il tempo per soffermarsi a riflettere e identificare quelli che considera gli obiettivi di fondo della propria azione didattica in matematica.

Quando, all'inizio dei nostri incontri di formazione, poniamo la domanda a insegnanti dei vari livelli scolari (dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria superiore) emerge quasi sempre come molti degli obiettivi esplicitati dagli insegnanti siano in comune tra i vari livelli scolari. Insomma sembra realizzarsi, almeno negli ideali, quella verticalità così complicata da costruire nella sostanza.

E quali sono le risposte più frequenti? Emergono sistematicamente: la volontà di appassionare i ragazzi alla disciplina (c'è chi si accontenta di "non farla odiare"); quella di fornire strumenti per affrontare problemi: strumenti sia in termini di conoscenze specifiche, che di processi di pensiero ("insegnare a ragionare"). Oltre alla condivisione di conoscenze specifiche, il focus è su obiettivi affettivi (appassionare) e obiettivi legati allo sviluppo di un tipo di ragionamento, di una forma mentis riconosciuti come specifici della disciplina, e significativi per sviluppare nell'individuo la capacità di affrontare problemi di natura diversa.

Dopo aver condiviso gli obiettivi di fondo che ci poniamo insegnando matematica, la domanda più naturale sarebbe quella relativa alla percezione che l'insegnante ha sul raggiungimento di adeguati standard rispetto a tali obiettivi con i propri allievi (o almeno con una buona percentuale di essi). Solitamente però, negli incontri di formazione a questo punto poniamo una domanda diversa: «ma quanto, poi in aula, chiediamo ai nostri allievi di ragionare, di risolvere problemi che non siano esercizi,[1] di argomentare mettendo in evidenza i propri processi di pensiero durante le lezioni di matematica?». La domanda, che può apparire provocatoria e forse in parte lo è, evidenzia la convinzione che – paradossalmente proprio in matematica – si tenda, nei diversi ordini scolari con l'esclusione probabilmente dell'infanzia (scuola dell'infanzia in cui, contrariamente a quanto qualcuno magari può pensare si fanno diverse attività di natura matematica, seppure gli obiettivi siano declinati in campi di esperienza e non nelle singole discipline), a richiedere quasi esclusivamente la ripetizione di procedure (esercizi, dunque) piuttosto che mettere gli allievi innanzi a situazioni nuove, da affrontare con gli strumenti, matematici e non, costruiti nel tempo (problemi).

Insomma, l'impressione è che, proprio in matematica, si richieda ai nostri allievi essenzialmente l'attivazione di processi riproduttivi (risoluzione di esercizi) piuttosto che quella di processi produttivi (risoluzione di problemi), dando una rilevanza, anche in fase valutativa, enorme ai prodotti (risultati), piuttosto che ai processi e alla capacità di saperli descrivere e sostenere (argomentazione). Tale impressione è supportata dall'analisi dei libri di testo, e dall'evidenza di *problemi* raggruppati per sessione rispetto alle operazioni da usare, e comunque legati al capitolo specifico in cui compaiono; o da problemi con dati superflui o mancanti inseriti nella sezione problemi con dati mancanti, problemi con dati superflui (e quindi non veri problemi, ma esercizi, e per questo abbiamo evidenziato il termine in italico).

Le ragioni che favoriscono questo tipo di scelta didattica nell'insegnamento della matematica sono diverse, e tutte molto interessanti da discutere. In un recente contributo, Maria Pezzia (2015) ne illustra alcune, sottolineando come una delle variabili più influenti sia l'*ansia del tempo* che attanaglia molti insegnanti, ansia che porta, piuttosto coerentemente, a concentrarsi su ciò che viene ritenuto essenziale e a escludere quasi a priori la possibilità di fare altro.

A prescindere dal fatto che si sia o meno *vittime* dell'ansia da tempo, appare significativo riflettere su cosa riteniamo essenziale nell'insegnamento della matematica ai vari livelli scolari, se problem solving e argomentazione rientrino tra gli aspetti che consideriamo irrinunciabili, e confrontarsi poi ovviamente con i riferimenti normativi in tal senso.

1. Se consideriamo la definizione di problema data da Duncker (1945): "un problema sorge quando un essere vivente ha una meta, ma non sa come raggiungerla", la distinzione tra problema ed esercizio è immediata: se l'individuo sa già come deve raggiungere la meta allora è un esercizio, altrimenti è un problema.

In questo senso sia il piano epistemologico che quello normativo sembrano dissipare gli eventuali dubbi. Dal punto di vista epistemologico infatti, molti matematici sottolineano come l'essenza del fare matematica sia il risolvere problemi, e qualcuno aggiunge – sconfinando negli aspetti didattici – che il miglior modo per imparare a risolvere problemi sia affrontare problemi (Halmos, 1975). Dal punto di vista normativo, la lettura attenta delle recenti *Indicazioni Nazionali italiane per la scuola dell'infanzia e il primo ciclo* (MIUR, 2012) evidenzia come lo sviluppo di competenze nell'ambito del problem solving e argomentative sia un traguardo fondamentale di tutta l'educazione matematica dai 3 ai 14 anni: un traguardo dunque da sviluppare in verticale, ma anche trasversale alle diverse discipline e soprattutto riconosciuto come cruciale nella formazione del cittadino adulto[2]. Un aspetto particolarmente interessante, e forse 2
non sempre conosciuto, è il fatto che, essendo argomentazione e problem solving traguardi per lo sviluppo delle competenze, siano prescrittivi e dunque sicuramente essenziali. Un'altra osservazione importante è che ritroviamo l'attenzione al problem solving, e anche all'argomentazione (seppure esplicitata stranamente con meno enfasi), all'interno delle richieste in matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado (MIUR, 2010a, 2010b, 2010c): problem solving e argomentazione costituiscono dunque ufficialmente il *leit motiv* di tutta l'educazione matematica obbligatoria.

Problem solving e argomentazione inoltre sono ovviamente tra loro collegati: per valutare la risoluzione di un problema dobbiamo avere informazioni sia sui processi attivati (quindi è necessaria la spiegazione) sia valutare le giustificazioni delle scelte fatte (quindi la vera e propria argomentazione). D'altra parte richiedere di argomentare ha senso laddove lo studente è chiamato a fare delle scelte, ad assumersi delle responsabilità nell'attivazione dei processi di pensiero, e dunque in merito a processi produttivi: se chiediamo a uno studente di spiegare perché funziona un certo algoritmo che gli abbiamo insegnato (ad esempio la moltiplicazione in colonna), la risposta più naturale è «perché me lo ha detto lei che si fa così».

Per chiudere parliamo del punto di vista che ci sta più a cuore: quello didattico.

Una prima certezza è che i nostri allievi, a tutti i livelli scolari, fanno molta fatica nell'affrontare problemi e nell'argomentare. Negli ultimi anni le rilevazioni nazionali in Italia (INVALSI) ed internazionali (ad esempio OCSE-PISA) forniscono dei dati su questo fenomeno, al di là delle impressioni. Cosa succede ai nostri allievi più bravi quando di fronte ad un problema INVALSI diverso dal solito cadono immancabilmente? La prima reazione è quella di etichettare il problema INVALSI *diverso dal solito* come un trabocchetto o una richiesta troppo difficile; ma questa interpretazione, un po' consolatoria, vacilla nel momento in cui allievi considerati *meno bravi* danno la risposta corretta allo stesso quesito: sarà solo questione di fortuna? Un altro dato significativo e ricorrente che emerge dall'analisi dei risultati degli studenti italiani nelle rilevazioni standardizzate è

2. Per quanto riguarda la Svizzera, l'aspetto di competenza "comunicare e argomentare" è uno dei processi chiave che rientra tra le *Competenze fondamentali per la matematica* del Concordato Harmos (CDPE, 2011) ed è uno dei quattro processi individuati per la matematica nel nuovo *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015). Inoltre, la tematica del problem solving risulta cruciale nelle riforme in atto in Svizzera e in particolare in Canton Ticino, basate sul concetto di competenze. Quindi dal lato istituzionale è forte la spinta in questa direzione.

quello relativo alle difficoltà dei nostri allievi nel rispondere ai quesiti che richiedono di spiegare il perché o di riconoscere la correttezza o meno di argomentazioni. Un discreto clamore fecero in questo senso i risultati dell'indagine OCSE-PISA 2003 relativi alla matematica, in particolare un dato relativo alle domande a risposta aperta: la media delle omissioni degli studenti italiani a questo tipo di domande si attestò al 38%. In pratica mediamente 4 studenti su 10 non provarono nemmeno a rispondere alle domande in cui veniva richiesta un'argomentazione (la media di omissioni calcolata su tutti i Paesi OCSE si attestò al 25%).

Questa difficoltà non stupisce: da una parte evidentemente la maturazione di capacità e competenze relative alla risoluzione di problemi e argomentazione non è certamente semplice; dall'altra, come abbiamo sottolineato in precedenza, raramente in matematica viene richiesto agli allievi di risolvere veri problemi e di argomentare. Le due cose sono evidentemente collegate: proprio la consapevolezza delle difficoltà di certe richieste può portare l'insegnante a evitare di farle, per paura di mettere troppo in difficoltà i propri allievi o per convinzione che non ce la possano fare. Infatti, proprio le difficoltà degli allievi vengono talvolta usate come una sorta di motivazione per non lavorare su problem solving e argomentazione: «hanno veramente enormi difficoltà ad argomentare», «non sanno risolvere problemi», «quando mi danno la risposta corretta, mi accontento di quella e mi guardo bene dal chiedere il perché, rischio di metterli in enormi difficoltà» (qualcuno aggiunge «e poi non posso più dare un bel voto»).

Rispetto a tale posizione, che spesso ascoltiamo durante i nostri incontri di formazione con gli insegnanti, secondo noi è importante condividere con gli insegnanti due riflessioni.

La prima riguarda la condivisione del fatto che è naturale che i nostri studenti abbiano difficoltà nella maturazione di tali competenze, trattandosi di competenze complesse che costituiscono traguardi significativi di un percorso educativo lungo: proprio per questo bisogna dedicarci tempo e attenzione e progettare percorsi in verticale. Senza dimenticare che gli obiettivi relativi alle competenze di problem solving e argomentazione sono, per loro natura, obiettivi trasversali, che coinvolgono, nella loro specificità, molteplici discipline (nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo ad esempio, obiettivi sull'argomentazione sono, come è prevedibile, compresi anche nell'insegnamento dell'italiano),[3] e il raggiungimento dei quali passa per il lavoro su altre competenze 3
fondamentali, come ad esempio quelle linguistiche.

La seconda è relativa ai *danni* che una scelta didattica improntata su richieste esclusivamente procedurali, e sull'enfasi relativa ai prodotti piuttosto che ai processi comporta. Innanzitutto, l'enfasi sugli aspetti riproduttivi della matematica favorisce la costruzione

3. Nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015, disponibile al seguente url: http://www.pianodistudio.ch/ la comunicazione è uno dei sei ambiti delle competenze trasversali: sviluppo personale, collaborazione, comunicazione, pensiero riflessivo e critico, pensiero creativo, strategie di apprendimento. Per ciascuno di questi viene proposta una definizione generale, il suo ambito di significato, l'analisi di alcuni processi chiave che la caratterizzano e una progressione di profili di competenza riferita alla conclusione dei tre cicli della scuola dell'obbligo. L'argomentazione non rientra in modo esplicito nel comunicare, ma viene citata nelle strategie d'apprendimento. Rientra invece in modo esplicito tra i processi della matematica insieme a comunicare e nella parte legata all'italiano, all'arte e alla motricità.

di teorie del successo per cui il bravo in matematica è chi fornisce la risposta corretta in poco tempo. Tali teorie del successo sono da una parte epistemologicamente discutibili, dall'altra molto pericolose: ad esempio creando false illusioni, che spesso si sgretolano, senza preavviso alcuno, in snodi critici come solitamente sono i passaggi scolari (anche quello terziario dalla scuola secondaria di secondo grado all'università). Un'altra conseguenza importante di questo approccio all'insegnamento della matematica è sulla visione della matematica che gli allievi si costruiscono: in particolare, paradossalmente, la matematica viene riconosciuta, dalla maggioranza degli studenti, come la disciplina all'interno della quale è meno richiesto prendere decisioni strategiche (Zan, 2007).

I risultati di una lunga ricerca sul rapporto con la matematica degli studenti italiani, condotta insieme a Rosetta Zan (Di Martino & Zan, 2005; Di Martino & Zan, 2010; Di Martino, 2015) e basata sulla raccolta di circa 1500 temi autobiografici dal titolo: "Io e la matematica", hanno confermato quanto sia radicata tra gli allievi la convinzione che in matematica non si possano esprimere opinioni e come questa convinzione sia spesso uno dei motivi dichiarati per l'avversione verso una disciplina percepita come arida e distante. Luca (nome di fantasia) studente dell'ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado scrive:

> «Per risolvere un'equazione, non hai certo bisogno di creatività, non serve la tua interpretazione, oppure dire quello che senti; la matematica è priva di sentimento, basta pensare al famoso detto: "la matematica non è un'opinione". Proprio in quella frase è racchiusa la mia ripugnanza nei confronti di essa, non è come un tema nel quale si può avere interpretazioni diverse, c'è un solo modo di riuscire, un unico metodo».

Alcune scelte dell'insegnante dunque, come quella di non insistere troppo su problem solving e argomentazione per evitare di mettere in difficoltà gli allievi, seppur dettate dalle migliori intenzioni, possono in realtà rivelarsi contro-producenti e dannose. In questo quadro, appaiono particolarmente appropriate le parole di Rosetta Zan a conclusione di un suo lavoro, piuttosto significativamente intitolato *I danni del bravo insegnante*:

> Credo che il 'bravo' insegnante diventi semplicemente... bravo insegnante, quando riesce a pensare su tempi lunghi e non brevi: quando si convince che ha tempo a disposizione, e che in questo tempo vale la pena di investire sforzi e risorse. Gli aspetti affettivi diventano cruciali non per gestire una relazione soddisfacente nell'immediato, ma per sostenere la realizzazione di un progetto educativo a lungo termine, perché questa realizzazione richiede fiducia, coinvolgimento, attenzione. L'interesse per l'allievo non si concretizza stabilendo con lui un generico buon rapporto, evitando il conflitto, evitando – a lui e a noi stessi – emozioni negative, ma accettando il disagio di gestire il conflitto, se necessario, accettando anche la sofferenza di vederlo vivere emozioni negative: in altre parole sostenendo, e non evitando, la sua fatica, confortati dalla convinzione che abbiamo davanti abbastanza tempo per vedere – o comunque per avere – i risultati di questa fatica. In particolare il sostegno da dare agli allievi in difficoltà non si esaurisce in un supporto per 'aiutarli' a dare risposte giuste, ma si allarga alla determinazione di perseguire processi di pensiero significativi, e di costruire pazientemente occasioni di crescita.
>
> (Zan, 2001, p. 140)

La convinzione è che sia fondamentale ribaltare il paradigma riportato da Luca e passare da «la matematica non è un'opinione» a «in matematica le opinioni sono fondamentali ed è altrettanto cruciale imparare a esplicitarle, difenderle, e assumersene la responsabilità».

D'altra parte è bene osservare come il lavoro sul problem solving e quello sull'argomentazione siano intimamente connessi.

Nello schema tradizionale, nel quale l'insegnante, prima di proporre una qualsiasi attività, fa vedere agli studenti *come si fa*, magari anche più volte, la richiesta di argomentare i processi di pensiero è problematica. Di fronte a una matematica che mette di fronte esclusivamente a richieste di tipo riproduttivo si alimenta la convinzione che non sia richiesto, talvolta ammesso, in matematica di fare scelte, che le scelte siano fatte da altri (spesso senza condividere nemmeno i motivi di tali scelte) e che lo studente si debba adeguare. Tra l'altro, quel far vedere *come si fa* viene letto (a torto o a ragione) dagli studenti di qualsiasi età come un *come si deve fare*: i bambini della primaria spesso si chiedono «la maestra vorrà che faccia così?», e ancora all'università c'è sempre qualche studente che durante gli scritti si alza, venendo a chiedere «professore, ma lo posso fare così questo esercizio?», e la nostra risposta è sempre la stessa: «puoi farlo come meglio credi, l'importante è che giustifichi quel che fai». Questo modo di procedere alimenta quello che Brosseau (1986) ha brillantemente caratterizzato come contratto didattico: «In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico».

Proprio per questo intreccio tra problem solving e argomentazione, un aspetto fondamentale (e di criticità) per lavorare su queste due competenze è avere un repertorio di bei problemi da poter usare. I bei problemi si possono costruire, possono venir fuori da situazioni inaspettate e quotidiane (magari da curiosità degli allievi), ma è evidente che avere un repertorio di buoni problemi da poter usare è importante.

In questo senso le prove INVALSI possono essere un catalogo interessante da sfruttare per lavorare su problem solving e argomentazione piuttosto che per migliorare i risultati nelle prove stesse.[4] È estremamente pericoloso avere come obiettivo didattico 4
quello di ottenere risultati migliori in una valutazione (qualsiasi essa sia). Qualsiasi valutazione dovrebbe essere vissuta dall'insegnante come uno strumento che fornisce elementi rispetto al percorso che sta facendo insieme al suo gruppo classe, e non come un obiettivo.

4. Tra l'altro esiste ora un database online di tutte le prove INVALSI somministrate, con un motore che permette di fare ricerca per livello scolare, percentuali di risposte corrette, obiettivi, argomenti, parole chiave. Il database, raggiungibile all'url www.gestinv.it è accessibile gratuitamente tramite richiesta di registrazione.

Nel prossimo paragrafo, illustreremo meglio cosa intendiamo per bei problemi e perché consideriamo le prove INVALSI come una possibile risorsa per la pratica didattica; non l'unica in questo senso ovviamente (molto interessanti sono anche i problemi di alcune giochi matematici come il *kangaroo*, il *rally matematico transalpino*, e tanti altri ancora), ma appunto con alcune peculiarità interessanti: il pregio della facilità di accessibilità e il fatto che restituiscano importanti informazioni statistiche sulle eventuali difficoltà degli studenti rispetto ad uno specifico problema). Mostreremo, in tre esempi su livelli scolari diversi, come il lavoro su problem solving e argomentazione possa essere importante anche per l'insegnante, fornendo elementi per meglio interpretare eventuali difficoltà e dunque per intervenire in modo mirato e maggiormente efficace su tali difficoltà.

2 Problem solving e argomentazione: dalla ricerca di bei problemi all'attività in aula

Abbiamo terminato il precedente paragrafo parlando di bei problemi e di INVALSI, ma cosa si intende per bei problemi? Esistono degli indicatori? E in che senso le prove INVALSI possono costituire un repertorio di bei problemi e quindi una risorsa nella pratica didattica dell'insegnante?

Il fatto di essere o meno un bel problema dipende da molte variabili, alcune di queste non *assolute*: ad esempio, un problema deve essere di una complessità adeguata per la classe, dove per adeguata si intende che si ritiene che gli studenti possano dire qualcosa su quel problema, non che sicuramente arrivino a risolverlo. È piuttosto evidente che l'adeguatezza deve essere valutata solo dall'insegnante che conosce il gruppo classe.

D'altra parte si possono dare dei criteri assoluti di qualità per un problema. Proviamo ad elencarne due che ci sembrano particolarmente significativi:

1. *Non si sa a priori quali conoscenze vanno utilizzate per affrontarlo.* Da questo punto di vista i problemi raggruppati per capitolo (ad esempio "problemi con la moltiplicazione") non sono buoni problemi.

2. *È possibile l'esplorazione e le strategie possibili per rispondere sono molteplici.* Da questo punto di vista, sono particolarmente indicati i problemi geometrici (ma come vedremo non solo quelli).

Si suggerisce inoltre una certa variabilità nel complesso dell'attività di problem solving che sviluppiamo: ad esempio usando problemi con dati di varia natura, non sempre e non solo numerici (un esempio di un problema di questo tipo è chiedere la stima di una misura di qualche cosa a partire da una fotografia, un'immagine); e anche mettendo gli allievi di fronte a problemi con più soluzioni, senza soluzioni o con soluzioni necessariamente approssimate.

Venendo alle prove INVALSI, ovviamente ce ne sono di più interessanti e di meno interessanti per tutti i livelli scolari (come vedremo tra l'altro, alcune di seconda primaria sono decisamente interessanti da sperimentare anche alla scuola dell'infanzia), ma qui vogliamo discutere non tanto nel merito dei singoli quesiti, ma delle caratteristiche generali dei quesiti INVALSI e di come possano essere usati nell'attività di problem solving e argomentazione in classe.

Quali aspetti positivi riconosciamo nei quesiti delle prove INVALSI? Innanzitutto, a differenza della maggior parte dei problemi dei libri di testo, sono spesso effettivamente "veri problemi" e non esercizi per gli allievi. Inoltre, tutti i quesiti sono agganciati esplicitamente a uno o più obiettivi e traguardi di competenza delle Indicazioni Nazionali. Infine, come già ricordato, altri due aspetti non irrilevanti sono il fatto che siano un archivio pubblico e facilmente reperibile e che offrano dati statistici sull'esito a livello nazionale, che offrono di per sé spunti di riflessione importanti.

D'altra parte, altri elementi delle prove INVALSI non convincono rispetto a un lavoro in classe su problem solving e argomentazione. Innanzitutto i tempi: per lavorare su un problema in classe, discutere insieme sui vari modi per affrontarlo, c'è bisogno di dedicare tempo al singolo problema. Inoltre il fatto che per lo più sono domande a risposta chiusa: questo comporta da una parte che ci sia poco spazio e poca enfasi per l'argomentazione, dall'altra che i processi di pensiero siano fortemente indirizzati dalla scelta dei distrattori. Infine l'attenzione al prodotto (risposta corretta) molto più che al processo, e comunque la necessità di stabilire a priori cosa è giusto e cosa è sbagliato: aspetto critico e discutibile quando si voglia valutare argomentazioni.

A questo punto non è necessario per i nostri scopi valutare se siano più gli aspetti positivi o quelli problematici nei quesiti delle prove INVALSI; infatti, l'osservazione chiave è che tutti gli aspetti critici che abbiamo evidenziato sono aspetti legati alle modalità d'uso, che l'insegnante, a partire da un quesito che ritiene interessante, può tranquillamente modificare per l'utilizzo in classe. L'insegnante può dedicare il tempo che crede necessario ad un singolo problema, lo può modificare, oppure lasciare inalterato nella sua struttura matematica ma rendendolo a risposta aperta. Lo può anche presentare a risposta chiusa per poi discutere con gli allievi sui processi attivati per arrivare alla risposta.

Gli esempi che vedremo, che intendono coprire tutti gli ordini scolari, sono tratti da una tesi di Laurea triennale in matematica sulle competenze argomentative degli studenti alla fine della scuola dell'obbligo e dai risultati di un progetto di ricerca-azione sulle prove dell'area matematica del primo ciclo, coordinato da Rosetta Zan e realizzato nell'ambito di una convenzione di ricerca tra il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa e INVALSI. Il progetto ha coinvolto diversi ricercatori in didattica della matematica e circa 40 docenti di scuola primaria e scuola secondaria di primo grado.

2.1 Le difficoltà argomentative alla fine della scuola dell'obbligo

All'interno di una tesi di Laurea (Marcheschi, 2014) abbiamo cercato di analizzare le capacità argomentative degli studenti alla fine della scuola dell'obbligo. Per far questo abbiamo utilizzato domande tratte da prove INVALSI, ma trasformate da domande a risposta chiusa univoca a domande a risposta aperta con richiesta di giustificazione delle risposte. La scelta è stata quella di privilegiare l'ambito Numeri (che, per tradizione didattica, è quello su cui si concentrano le maggiori attenzioni a livello di scuola dell'obbligo) e – visto il focus sulle capacità argomentative – di utilizzare domande di livello 8 (terza secondaria di primo grado). La prova proposta, composta da 9 quesiti, è stata proposta ad un totale di 444 studenti di 23 classi differenti (2 prime e 21 seconde) provenienti da 6 istituti di istruzione secondaria differenti: 49% da un liceo scientifico o delle scienze applicate, 32% da un istituto tecnico o professionale, 19% da altri licei.

Il primo aspetto interessante è emerso dalle interviste agli insegnanti prima della consegna della prova nelle loro classi, che hanno permesso di raccogliere risposte tutte dello stesso tenore: «l'argomentazione potrebbe creare qualche difficoltà», «mi aspetto che rispondano abbastanza bene, tranne la motivazione». Insomma, emerge la consapevolezza del fatto che la giustificazione delle risposte è l'aspetto più delicato, ma anche la conferma che, paradossalmente, invece di essere particolarmente curato, è completamente trascurato: «non sono abituati a risolvere problemi di questo tipo, in cui si chiede il perché!».

Effettivamente l'analisi degli elaborati degli studenti da una parte conferma le previsioni degli insegnanti: molti allievi fanno fatica a giustificare le risposte date, dall'altra evidenzia come dietro a risposte corrette spesso ci siano processi che denotano lo scollamento tra risposta corretta e comprensione.

L'identificazione tra risposta corretta e comprensione è un fenomeno diffuso a livello educativo, che Gardner chiama "il compromesso delle risposte corrette" e descrive con le seguenti parole:

> «insegnanti e studenti (...) non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri "compromessi delle risposte corrette". In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette».
>
> (2002)

Zan (2007) descrive le varie conseguenze negative, a livello di insegnamento e apprendimento della matematica, di tale compromesso.

Vediamo adesso, attraverso l'analisi delle risposte ottenute ad uno dei quesiti utilizzati nella ricerca (**Figura 1**), due aspetti ricorrenti e significativi emersi dallo studio condotto.

Quesito: È vero o falso che un numero pari maggiore di due si può sempre scrivere come somma di due numeri dispari diversi tra loro? Perché?

Figura 1
Quesito vero o falso

Il primo aspetto è che molte difficoltà (e risposte scorrette «Falso») sembrano dipendere da una non totale comprensione del testo. C'è chi mostra un contro-esempio a partire da un numero dispari, nonostante che il testo chieda di verificare una proprietà dei numeri pari («Falso. 3=2+1 e 2 è pari»); c'è chi invece interpreta la proprietà da dimostrare come «in qualsiasi scrittura di un numero pari come somma di due numeri diversi tra loro, i due numeri devono essere dispari» («Falso perché un numero pari maggiore di due si può sempre scrivere anche come somma di due numeri pari diversi tra loro. Esempio: 10=3+7, ma anche 10=6+4»).

Il secondo aspetto è l'uso diffuso dell'elencazione di un numero finito di esempi numerici per giustificare la validità di una proprietà per tutti i numeri: questo approccio è di gran lunga quello più ricorrente per giustificare la risposta: «Vero». Nonostante, come sappiamo, questo approccio sia *matematicamente problematico* (non escludendo eccezioni), è interessante notare come si possano riconoscere negli elaborati degli alunni che lo utilizzano diversi gradi di sofisticazione: c'è chi propone pochi casi senza nessun collegamento, c'è invece chi nella produzione di esempi, praticamente mostra il germe di una regola generativa (ad esempio scrivendo sempre i numeri pari considerati come il numero precedente più 1). Interessante, notare che alcuni protocolli degli allievi relativi alla giustificazione della risposta «Vero», sembrano testimoniare la consapevolezza che in matematica *non sia accettata* come giustificazione quella di aver provato per qualche caso, approccio che probabilmente li ha portati a dare la risposta («Vero, ma non me lo so spiegare», «È vero, ho appena constatato la verità di questa affermazione, ma effettivamente non me la spiego»).

Infine, dai protocolli, emerge anche la *forza affettiva* degli esempi: c'è chi argomenta compiutamente perché la proprietà valga per ogni numero pari maggiore di due, ma poi sente comunque l'esigenza di mostrare degli esempi («Sì perché si potrà sempre scrivere come il precedente, che è dispari, più 1, che è dispari anche lui. Esempi: 4=3+1, 6=5+1, 24=23+1, 64=63+1, 82=81+1, 112=111+1, 256=255+1»).

2.2 L'argomentazione come strumento interpretativo per l'insegnante

All'interno del progetto di ricerca-azione sulle prove INVALSI sviluppato al Dipartimento di Matematica di Pisa abbiamo analizzato il quesito in Figura 2 (quesiti molto simili sono stati usati, negli anni precedenti, anche nelle prove di prima secondaria di primo grado):

Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?

A. 100,010
B. 100,001
C. 99,909
D. 99,990

Figura 2
Quesito D23, prova INVALSI 2013 – livello 5

Il quesito ci ha incuriosito per la bassa percentuale di risposte corrette all'interno del campione nazionale (B, 43,9%), e per il fatto che un distrattore (il D) ha ricevuto più scelte della risposta corretta (44,6%). Lo scopo esplicito della domanda era "Confrontare numeri decimali". Ci siamo chiesti: sono le difficoltà a confrontare numeri decimali i motivi delle difficoltà a rispondere a questa domanda? In caso affermativo, l'eventuale intervento didattico si dovrà concentrare sulla scrittura, le operazioni e il confronto coi numeri decimali.

Abbiamo dunque sperimentato il quesito, nella sua versione originale, nelle quinte di alcuni insegnanti del gruppo di ricerca-azione, facendo seguire alla risoluzione individuale, una discussione di classe incentrata non tanto sulle risposte date, ma su come e perché i bambini avevano scelto la risposta data. È stata condotta quella che in educazione matematica è chiamata *discussione matematica* (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995).

Le percentuali ottenute nelle nostre classi sono state simili a quelle del campione nazionale, ma è dalla discussione sul perché delle risposte, dalle argomentazioni, che abbiamo ottenuto la risposta alla nostra domanda: abbiamo cioè raccolto elementi per interpretare le difficoltà degli studenti nell'affrontare il quesito. In particolare è emerso come la risposta D (99,990) non fosse scelta per difficoltà legate ai numeri decimali, ma per un aspetto linguistico, tra l'altro relativo ad un concetto molto rilevante in matematica: la vicinanza. Per molti allievi "vicino a" significa "prima di", "che non ha ancora superato" («il più vicino a cento significa che non sono ancora arrivato a cento», «il 100,010 e 100,001 sono da escludere perché sono oltre il 100 e quindi lo superano e si allontanano»): interessante anche che i bambini facciano riferimento ad esempi del linguaggio quotidiano per supportare la loro interpretazione del termine "vicino" (tipicamente esempi sportivi di traguardo da raggiungere).

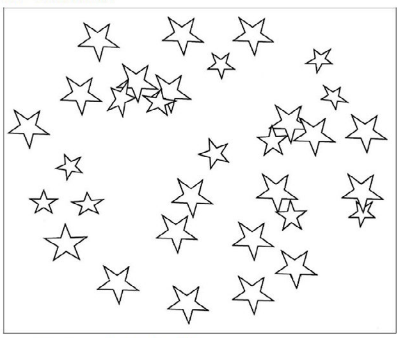
Alla luce di ciò, ovvero della connotazione di "vicino" come "precedente", "che viene prima", si chiarifica l'ampia scelta del distrattore D. Questo esempio è piuttosto esemplificativo di come la richiesta dell'argomentazione sia anche uno strumento formidabile per l'insegnante, permettendo di raccogliere elementi per un'interpretazione mirata delle difficoltà, progettare eventuali interventi di recupero o nuove attività di riflessione.

In questo caso, nel quale è emersa una difficoltà di natura linguistica, un'attività significativa è quella di chiedere ai bambini di riformulare il problema alla luce di quanto emerso dalla discussione. Abbiamo proposto la riformulazione in una delle classi, ed il risultato ottenuto è interessantissimo, i bambini propongono la seguente formulazione: «Quali di questi numeri, andando avanti e indietro sulla retta dei numeri, si avvicina di più a 100?».

2.3 Dal problema alle strategie

Sempre all'interno del progetto di ricerca-azione sulle prove INVALSI sono state analizzate le potenzialità del quesito in **Figura 3**: quesito D1 delle prove 2013 per la seconda primaria (il quesito, con numeri e modalità diverse, può essere proposto ai bambini dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia):

D1. Conta le stelle.



Quante sono in tutto le stelle?

Risposta: ....

Figura 3
Quesito D1, prova INVALSI 2013 - livello 2

L'interesse per il quesito è nato dall'analisi a priori dello stesso. Le maestre coinvolte nel progetto hanno identificato difficoltà di due tipologie in questa richiesta: la prima legata a difficoltà generali rispetto allo scopo della domanda "Verificare il possesso di strategie di conteggio", e quindi legate all'uso di strategie non efficienti (ad esempio contare senza segnarsi cosa si è contato rischiando di contare due volte la stessa stella, o di saltare nel conteggio una stella), o a difficoltà nella conta dipendenti da una non definita acquisizione della successione dei numeri («1, 2, 2, 3, …» oppure «1, 2, 4, …»). La seconda legata a difficoltà specifiche del particolare insieme di oggetti da contare, che si presenta come un insieme di oggetti sovrapposti, disposti in modo caotico e non spostabili.

Come già scritto, un'adeguata difficoltà è una caratteristica fondamentale di un problema: sia per stimolare l'attivazione di processi di pensiero significativi, sia perché la non sicurezza sulla risposta porta i bambini a interessarsi dei processi che possono svelare quale è la risposta corretta, e quindi può spostare l'attenzione dei bambini dalla risposta in sé ai processi. Ed è proprio quello che avviene con questo problema: le difficoltà, portano a una varietà di risposte diverse al problema all'interno della classe (la risposta corretta è 32). In questo caso è fondamentale la gestione dell'insegnante, che invece di fornire la risposta corretta, usa la disomogeneità delle risposte per spostare l'attenzione sui processi attraverso domande (ad esempio la seguente: «Come facciamo per essere sicuri di aver contato nel modo giusto?»). Nelle sperimentazioni effettuate in classe abbiamo assistito a un completo spostamento dell'attenzione dei bambini dalla risposta numerica alle strategie per contare bene: alla fine delle discussioni, sempre molto partecipate nelle classi in cui le abbiamo condotte, è raro che i bambini chiedano quale sia la risposta corretta alla domanda, questione dalla quale era partita la discussione stessa.

Un altro effetto delle discussione condotte è l'insorgere nei bambini della consapevolezza che il problema del conteggio permette un'ampia varietà di approcci possibili: indicando con il dito; segnando un puntino sulle stelle contate; segnando le stelle e contemporaneamente facendo una stanghetta sul foglio, contando alla fine le stanghette ordinate; raggruppando le stelle, contando le stelle nei singoli gruppi e sommando. Dalle descrizioni dei procedimenti emerge addirittura come all'interno dello stesso approccio, ad esempio quello del raggruppamento, ci possano essere variazioni significative (c'è ad esempio chi raggruppa per cinque, chi per insiemi di stelle vicine, chi con linee verticali, chi con linee orizzontali).

Per i bambini è evidente che il contare oggetti con queste caratteristiche (non spostabili, disposti caoticamente e sovrapposti) può non essere per niente facile. Come nel caso del problema di natura linguistica di cui abbiamo discusso precedentemente, l'insegnante può sfruttare la presunta consapevolezza degli allievi sulle difficoltà del problema del conteggio delle stelle, per rilanciare e ottenere altri elementi di interpretazione interessanti. Proprio in questa ottica in una seconda primaria[5], dopo aver affrontato il problema del conteggio con la relativa discussione sulle strategie, è stato chiesto ai bambini come disegnerebbero le stelle per facilitarne il conteggio (e quindi intervenendo sulla disposizione, e, più in particolare, sulle sovrapposizioni). 5

5. La maestra che ha condotto questo lavoro è Paola Maggi dell'I.C. Gamerra di Pisa.

Tutti i bambini nel loro disegno evitano sovrapposizioni (Figura 4), e quasi tutti cercano di creare file di schieramenti di un numero fissato di stelline (tipicamente, ma non sempre, 3 o 10 con 2 di avanzo):

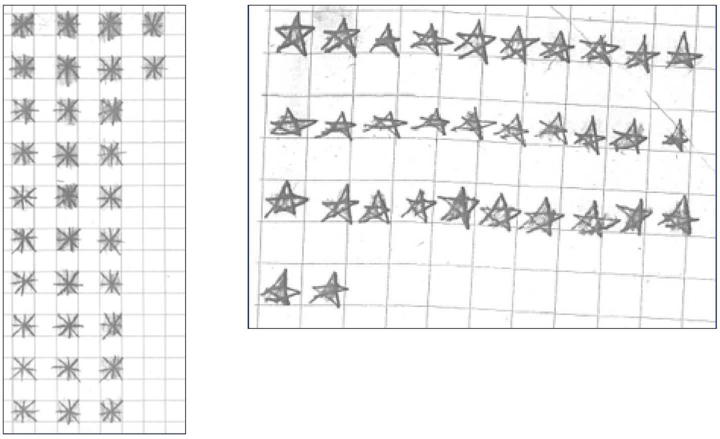


Figura 4
Protocolli con un numero fisso di stelle per riga allineate

Ma alcuni, pur basandosi su schieramenti di un numero fissato di stelline per riga, non evidenziano graficamente la corrispondenza biunivoca tra le stelle in una riga e quelle della riga successiva (Figura 5).

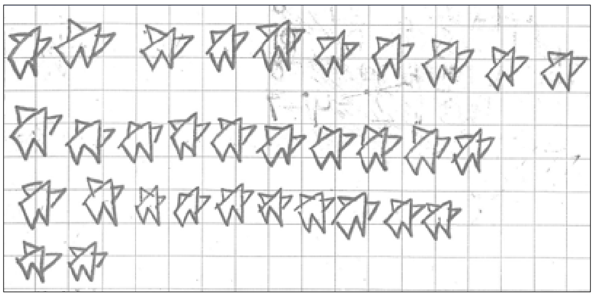


Figura 5
Protocollo con un numero variabile di stelle per riga, ma non allineate

È significativo che siano i bambini stessi, senza aspettare un pronunciamento qualsiasi da parte della maestra, a condividere a posteriori – rispetto al compito di facilitare il conteggio delle stellette – la non efficienza del disegno in Figura 5, rispetto ai disegni in Figura 4. In particolare, i bambini fanno notare come questa rappresentazione di Figura 5 permetta di contare le stelle in modo corretto, ma non sfrutti la potenza della rappresentazione per evitare di dover contare il numero di stelline su ogni riga, cosa che si fa facilmente nel caso della disposizione degli elementi come in Figura 4.

3 Conclusioni

In questo contributo abbiamo innanzitutto spiegato perché il lavoro sul problem solving e quello sull'argomentazione nel percorso matematico di un bambino siano da una parte indissolubilmente legati e dall'altro cruciali nell'educazione matematica di base. Abbiamo visto inoltre i danni che alcune scelte didattiche possono portare in termini di visione della matematica (con particolare riferimento alle teorie del successo), di visione dell'errore in matematica, di compromesso delle risposte corrette, e di atteggiamento nei confronti della matematica.

Siamo poi passati a mostrare alcune attività di argomentazione avviate nei diversi livelli scolari (anche di natura diversa tra loro), discutendo i risultati ottenuti. Emergono alcuni aspetti importanti, ma innanzitutto le potenzialità per l'insegnante di un tipo di attività di questo tipo. Da una parte è molto facile che l'insegnante si sorprenda delle risposte dei ragazzi e questo sorprendersi spesso evitato con paura è spesso, quando vissuto, motivo di soddisfazione per l'insegnante stesso. Dall'altra, raccogliere e analizzare le argomentazioni prodotte dai ragazzi quando si trovano di fronte a un problema diventa una vera e propria occasione di formazione anche per l'insegnante, attraverso la quale può mettere in crisi alcune sue certezze e ampliare il proprio bagaglio interpretativo, in modo da poter eventualmente intervenire sulle difficoltà in modo mirato.

La scelta di mostrare nel paragrafo precedente tre esempi di diversi livelli scolari è stata finalizzata non solo a fare discussioni e analisi su protocolli concreti, ma anche a mostrare esempi di attività potenzialmente significative, realmente sviluppatesi.

La decisione di lavorare su problem solving e argomentazione è sicuramente impegnativa e, nella sua trasposizione in classe, necessita della realizzazione di alcuni aspetti, primo tra tutti la necessità che l'adulto (l'insegnante) si metta in gioco, prestando realmente attenzione alle spiegazioni dei bambini, sforzandosi dunque di ascoltare gli allievi, e parta dalle parole dei bambini per intervenire sulle difficoltà o rilanciare con nuove domande e questioni.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. & Ferri, F. (1995). Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica. Modena: Centro Documentazione Educativa. Disponibile in http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?idSezione=666&idSezioneRif=659 (consultato il 03.02.2015).

Brosseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

CDPE (2011). *Competenze fondamentali per la matematica. Standard nazionali di formazione*. Disponibile in http://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf (consultato il 15.5.2017)

Di Martino, P. (2015). I fattori affettivi e il loro ruolo nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 38 A-B (3)*, 343-362.

Di Martino, P. & Zan, R. (2005). Raccontare il contare: l'incontro-scontro con la matematica nei resoconti degli allievi. In P. Gisfredi (a cura di), *Itinerari tra storie e cambiamento: momenti e processi formativi*, Bologna: Clueb Editrice, pp. 105-124.

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica: dalle buone intenzioni alle buone pratiche. In R. Biagioli e T. Zappaterra (a cura di), *La scuola primaria. Soggetti, contesti, metodologie didattiche*, Pisa: ETS.

Duncker, K., & Lynne, S. L. (1945). On Problem Solving. *Psychological Monographs. 58(5)*, i-113.

Gardner, H. (2002). *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli.

Halmos, P. (1975). *The problem of learning to teach. The American Mathematical Monthly, 82* (5), 466-47.

Marcheschi, A. (2014). *Un'indagine sulle difficoltà argomentative nell'Ambito Numeri degli studenti a livello di primo biennio della scuola superiore*. Tesi di Laurea, Università degli studi di Pisa, Italia.

MIUR (2010a). *Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali"*. Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf (consultato il 03.02.2015).

MIUR (2010b). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento Istituti Professionali*. Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali///linee_guida/_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf (Consultato il 03.02.2015).

MIUR (2010c). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento Istituti Tecnici*. Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf (consultato il 03.02.2015).

MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf (consultato il 03.02.2015).

Pezzia, M. (2015). Verso la costruzione di competenze argomentative nella scuola del primo ciclo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 38 A-B* (5), 536-546.

Zan, R. (2001). I danni del bravo insegnante. *Atti del Convegno Le difficoltà in matematica: da problema di pochi a risorsa per tutti*, 135-141, Castel San Pietro Terme, Italia.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Autore / Pietro di Martino
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa
pietro.dimartino@unipi.it