CORSO DI FORMAZIONE DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Istituto Comprensivo Perugia 15
Judit Jasso
judit.jasso@gmail.com

SVILUPPO DELLE ABILITÀ LOGICO-MATEMATICHE

modelli teorici

SVILUPPO DELLE ABILITÀ LOGICO-MATEMATICHE: MODELLI TEORICI

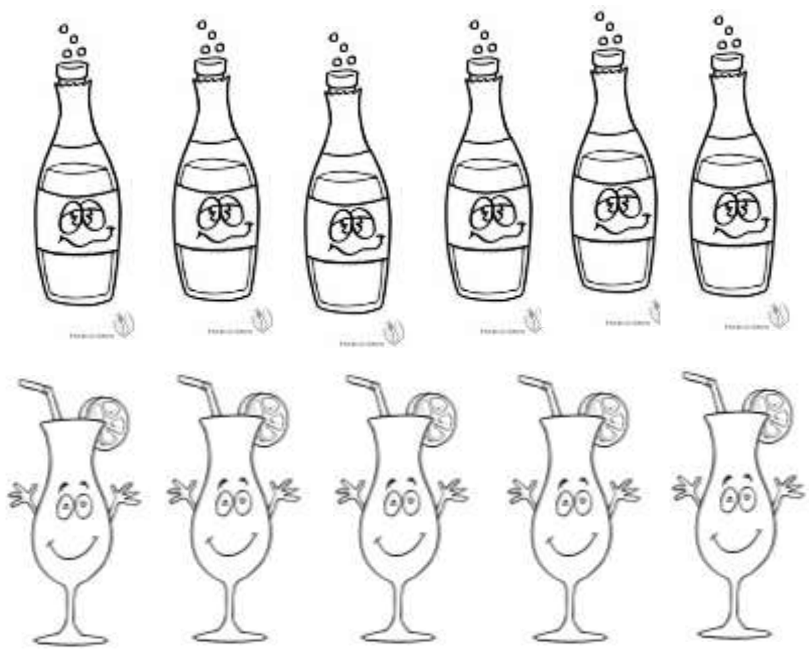
Piaget (1941, La genesi del numero nel bambino):

- **fase preoperatoria** fino a 6/7 anni: i processi di confronto tra le numerosità sono ancora dominate da elementi percettivi

- **fase delle operazioni concrete**: si raggiunge la consapevolezza che insiemi equipotenti rimangono tali pur cambiando la disposizione spaziale

PIAGET: ESPERIMENTI DI CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

«metti un bicchiere ogni bottiglia»

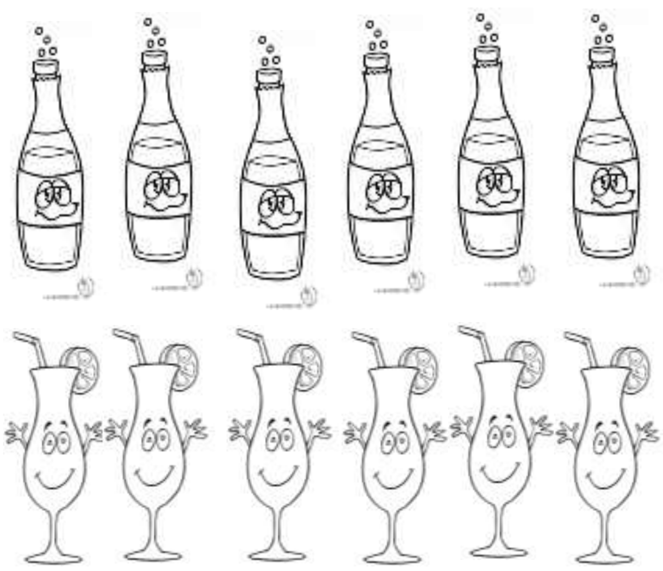


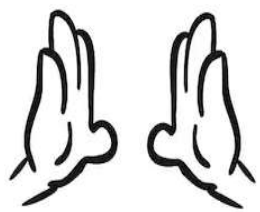
Corrispondenza
qualitativa globale
Influenzata dalla
percezione

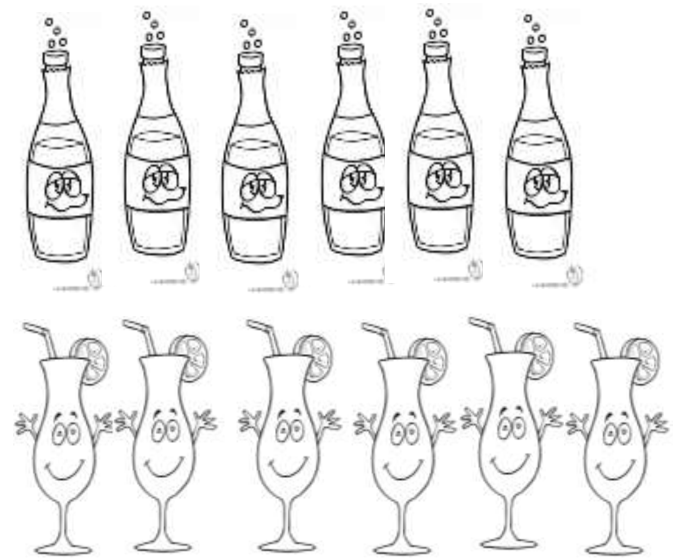
PIAGET: ESPERIMENTI DI CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

«metti un bicchiere ogni bottiglia»

Ci sono meno bottiglie





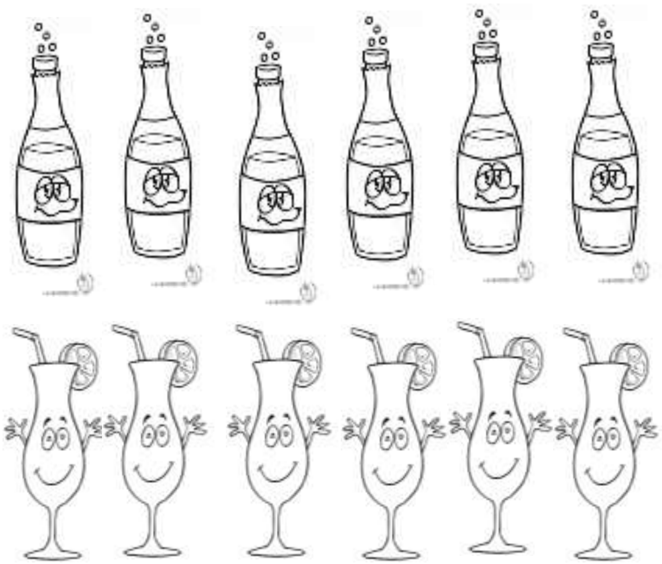


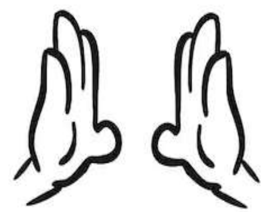
Corrispondenza intuitiva (insieme composto da più elementi), percezione ancora influente

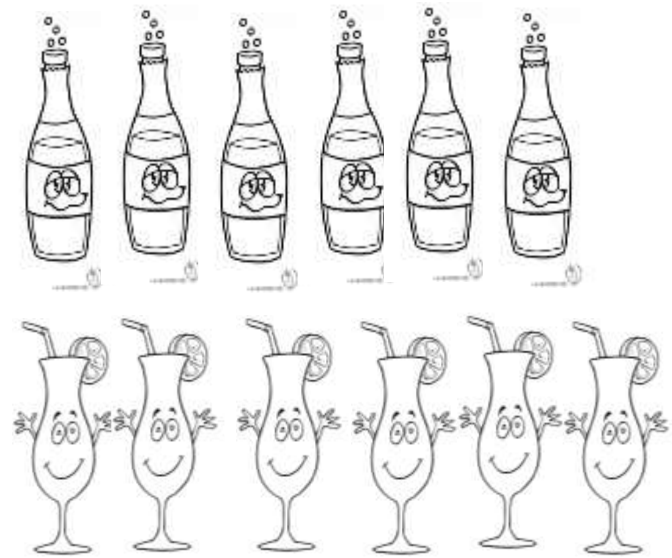
PIAGET: ESPERIMENTI DI CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

«metti un bicchiere ogni bottiglia»

Ci sono tante bottiglie quanti bicchieri







Corrispondenza operante o quantificante

L'apparenza percettiva non influisce più

LE CONCLUSIONI DI PIAGET

La capacità di contare si basa su:

- acquisizione della corrispondenza operante tra gli oggetti contati e acquisizione dei nomi dei numeri
- fino alla fase preoperatoria (6-7 anni) i processi di confronto di numerosità sono dominati da elementi percettivi

Implicazioni didattiche

- Il bambino fino a 6-7 anni non sarebbe pronto per imparare l'aritmetica
- L'insegnamento precoce della matematica sarebbe inutile se non addirittura dannoso
- Logica e teoria degli insiemi come base dell'aritmetica

RICERCA PSICOLOGICA SUCCESSIVA

- Si possono anticipare le tappe con attività mirate
- Variabili di disturbo negli esperimenti di Piaget: incomprensioni linguistiche, formulazione delle domande

  Esperimenti senza la componente verbale
- **Bambini molto piccoli sono in grado di discriminare numerosità e di compiere operazioni aritmetiche molto semplici a livello mentale**

ESPERIMENTI ANTELL E KEATING (1983), WYNN (1992)

Abituazione

Presentare ripetutamente lo stesso stimolo

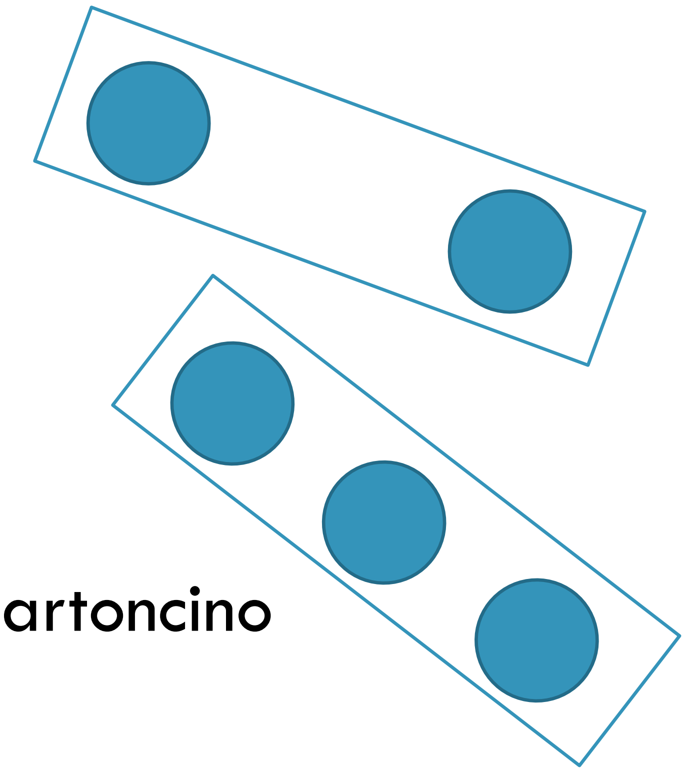
Perdita di interesse

Disabituazione

I bambini guardano più a lungo uno stimolo nuovo

Tempi di fissazione più lunghi

ANTELL & KEATING (83)



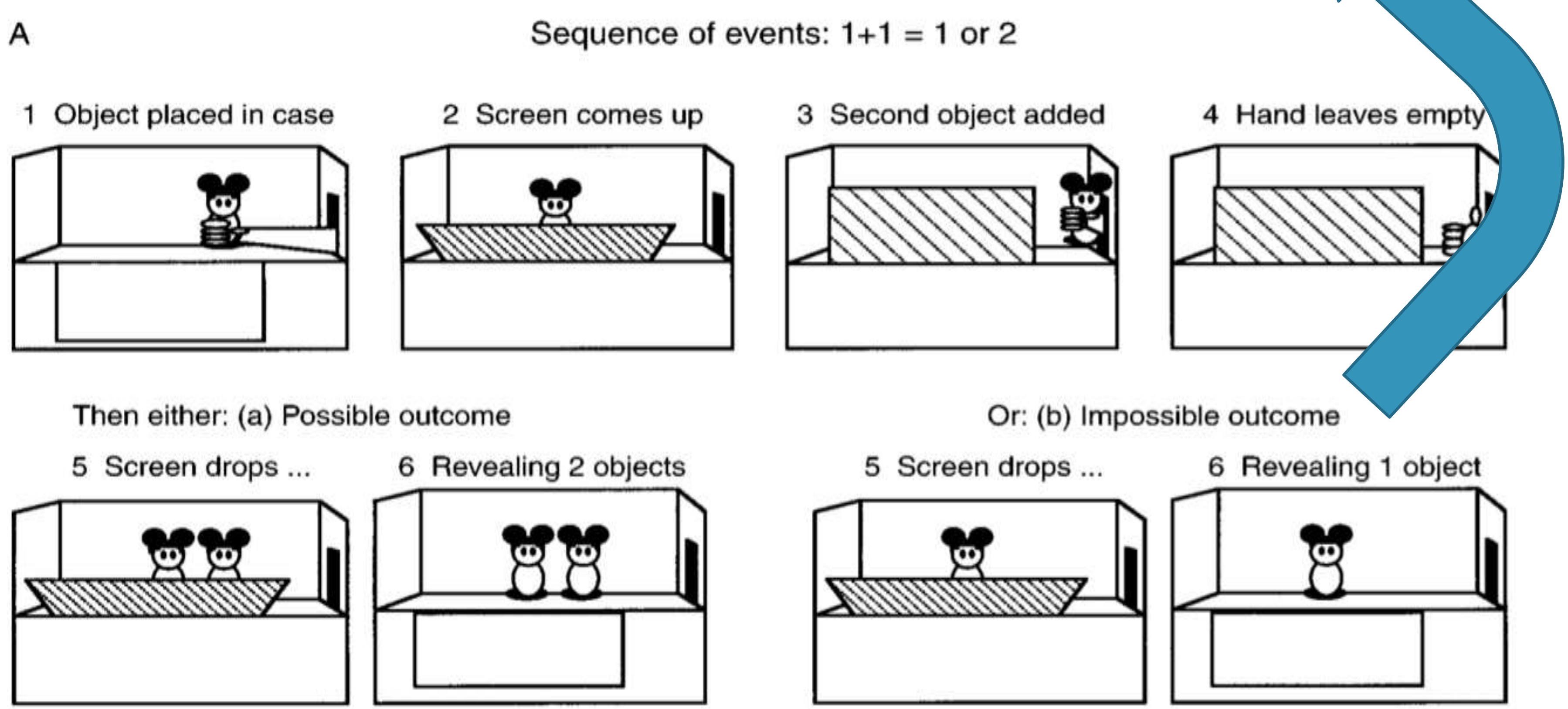
Neonati (minori di 12 giorni):

- Abituazione alla visione di cartoncino con 3 puntini
- Quando 2 puntini (disabituazione): tempo di fissazione più lungo
- Nuova abituazione ai 2 punti
- Quando di nuovo 3 puntini (disabituazione): tempo di fissazione più lungo

K. WYNN 1992, 1998

Tempi di fissazione più lunghi

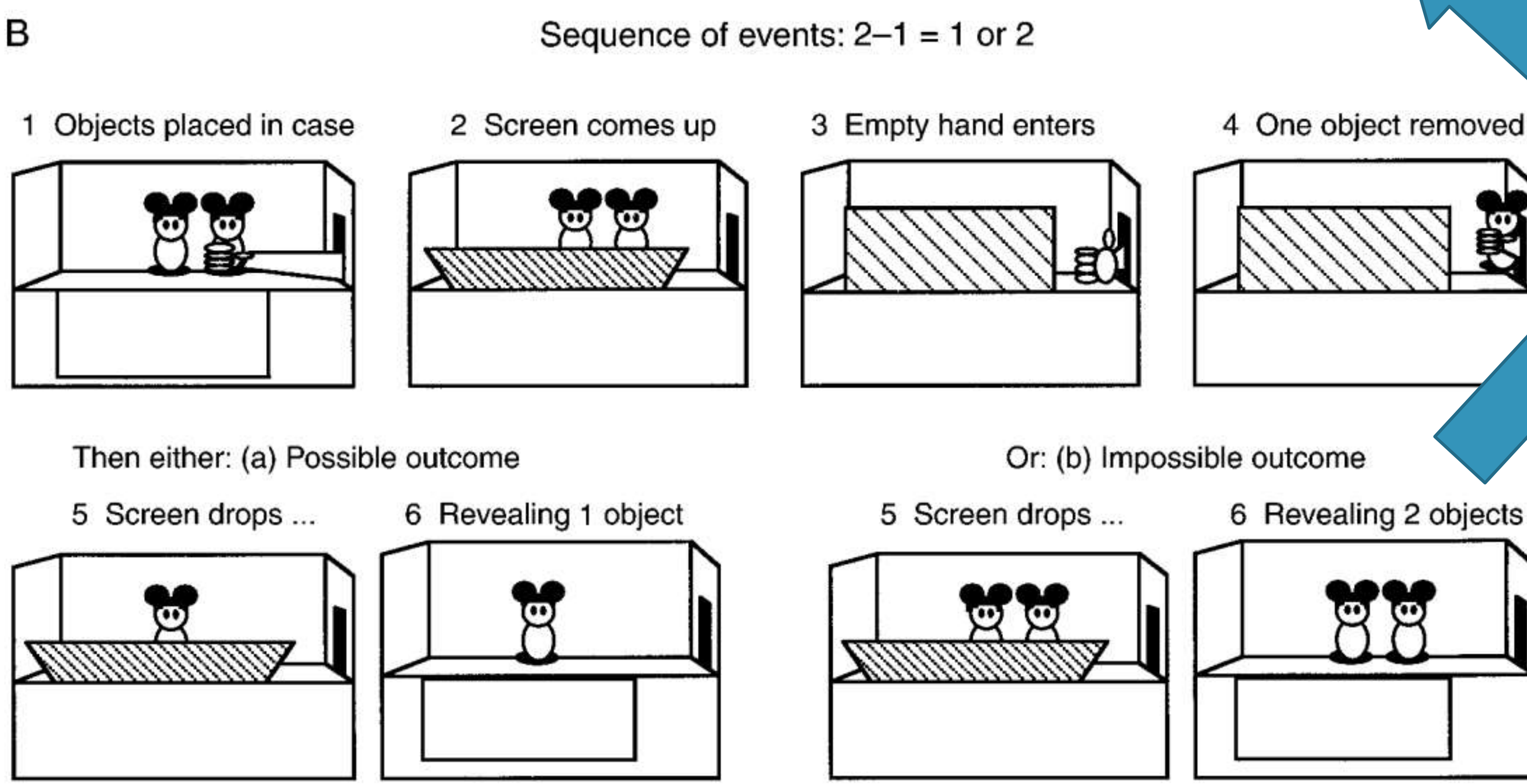
Bambini di 5-6 mesi: aspettative additive



K. WYNN 1992, 1998

Tempi di fissazione più lunghi

Bambini di 5 mesi: aspettative sottrattive



MODELLO DI GELMAN E GALLISTEL (1978)

Cognizione numerica:

- si basa su meccanismi **preverbali innati**

Successivamente:

- conteggio verbale
- acquisizione procedure di calcolo

Cinque principi che definiscono e guidano il **conteggio**

MODELLO COGNIZIONE NUMERICA GELMAN E GALLISTEL (1978)

Principio della corrispondenza biunivoca

- assegnare un solo numerale ad ogni oggetto contato
- ancora non formato se salta un oggetto nella conta, o conta due volte lo stesso oggetto

Principio dell'ordine stabile

- i numerali usati nella conta si succedono in un ordine stabile e ripetibile
- ancora non formato se una volta con 1,2,3 la volta dopo 2,1,3

Padroneggiati già a 2-3 anni

MODELLO COGNIZIONE NUMERICA GELMAN E GALLISTEL (1978)

Principio di cardinalità

- il numerale associato all'ultimo oggetto contato indica la numerosità di tutto l'insieme
- non è acquisito se conta correttamente, ma esita alla domanda "Quanti sono?".

  Oppure:

- se risponde l'ultimo numerale anche quando la conta a partire da 3.

verso i 4-5 anni

MODELLO COGNIZIONE NUMERICA GELMAN E GALLISTEL (1978)

Principio di astrazione

- comprendere che i principi si applicano a una qualsiasi collezione di oggetti

Principio di irrilevanza dell'ordine

- l'ordine in cui contiamo gli oggetti non è importante

verso i 4-5 anni

G. BROUSSEAU: IL CONTEGGIO

La conoscenza dei primi numeri naturali si manifesta attraverso il conteggio

Il conteggio nasce tipicamente per emulazione e/o su richiesta dell'adulto, non per "risolvere un problema"

Saper contare non è solo recitare una sequenza numerica!

Stanno 3 cose alla base del contare:

- Avere consapevolezza del fatto che c'è un **primo numero** (uno)
- Che dopo l'uno c'è il due e che si può **proseguire** (dopo ogni numero c'è un solo successore)
- Conoscere i **nomi** dei numeri

SITUAZIONE FONDAMENTALE PER IL CONTEGGIO

E’ invece importante considerare il conteggio come sapere culturale e **come mezzo per risolvere una situazione fondamentale**

“Abbiamo dei disegni con dei piccoli vasi.
Devi cercare dei pennelli nella stanza vicina e al ritorno metterne uno solo in ogni vaso.
Devi portare tutti i pennelli in un sol colpo e devi fare in modo che non resti né pennello senza vaso, né vaso senza pennello.
Se ti sbagli, riprendi tutti i pennelli, li riporti e riprovi di nuovo.”

La situazione prevede che il bambino:

- Chieda la quantità giusta di pennelli
- Verifichi la correttezza della quantità

SITUAZIONE FONDAMENTALE PER IL CONTEGGIO

La situazione ha alcune caratteristiche importanti:

- i **concetti di numero o di conteggio non appaiono nell'enunciato**: può essere compreso da un allievo che non sappia contare
- il **conteggio è il mezzo di soluzione** di questa situazione
- permette **varianti** per sviluppare progressivamente la conoscenza dei numeri come risposta a queste situazioni
  p.es. capacità di uscire da eventuali "tranelli"

  (rubare un vaso mentre il bambino è via)

IL SENSO DEL NUMERO

modelli teorici

IL SENSO DEL NUMERO

Negli animali:

Aneddotti su leoni, vespe, cornacchia, ecc.

Anche specie animali hanno un “senso del numero”.

- sensibilità alla numerosità, non è basata sul conteggio
- una specie di “contatore” vago, non è esatto come per l’uomo

IL SENSO DEL NUMERO

Concetto arduo da definire in modo astratto…

Due accezioni principali in letteratura:

1. Abilità di livello "inferiore", a base biologica: **senso percettivo della quantità, percezione rapida e accurata di piccole numerosità, capacità di confronto di grandezze**
   - Ci accomuna con gli animali
   - Studi psicologici e delle neuroscienze
2. Abilità di livello superiore che include anche le **relazioni matematiche, la gestione del calcolo e delle operazioni**
   - Studi di didattica della matematica

IL SENSO DEL NUMERO

Nell'uomo:

- eredità numerica "animale", ma rafforzata da una notevole abilità nel memorizzare, confrontare, operare
- capacità di concepire vasti sistemi di simboli e di rappresentazioni numeriche astratte
- organo cerebrale del linguaggio
- capacità di architettare progetti complessi con memoria del passato e anticipazione del futuro

IL SENSO DEL NUMERO

Nelle culture primitive: nomi speciali solo per i primi numeri, e poi… "molti"

Francese "très"=molti deriva da "tre"

SUBITIZING:

riconoscimento rapido e accurato della numerosità di (fino a 4) oggetti senza contare, dopo strategie di calcolo (raggruppamenti, configurazioni comode)

IL SENSO DEL NUMERO

→ L'abilità di riconoscere, approssimare, manipolare velocemente quantità

CS1: sistema centrale per la rappresentazione approssimata di numerosità elevate (esperimenti visivi e uditivi - Dehaene):

- la rappresentazione dipende dal rapporto delle due numerosità
- a 6mesi si è in grado di distinguere tra due numerosità in rapporto 1:2, ma non in rapporto 2:3
  (solo numeri sopra 4, p.es. 8 contro 16)
- a 10 mesi anche tra numerosità in rapporto 2:3
- adulti: il rapporto per la distinzione è 7:8

IL SENSO DEL NUMERO

CS2: sistema centrale per la **rappresentazione precisa di un numero ridotto** di oggetti singoli (esperimenti visivi e uditivi - Dehaene):

- la rappresentazione **NON dipende dal rapporto delle due numerosità**, ed ha un limite superiore: 3
- a 10-12 mesi si è in grado distinguere 1 da 2, 2 da 3, ma non 3 da 4, 2 da 4, 3 da 6 o 1 da 4, 4 da 6
- a 14 mesi cercano gli oggetti fino a 3 oggetti nascosti, se vengono nascosti 4 oggetti ne ritrovano 1 e poi smettono
- adulti: fino a 4 risposta immediata e precisa (subitizing), sopra crescente tempo di risposta e maggiori errori

MODELLO MC CLOSKEY 1985, 1987)

Sistema del calcolo (fatti e procedura richieste per eseguire calcoli)

Sistema di processamento dei numeri (meccanismi di comprensione e di produzione del numero)

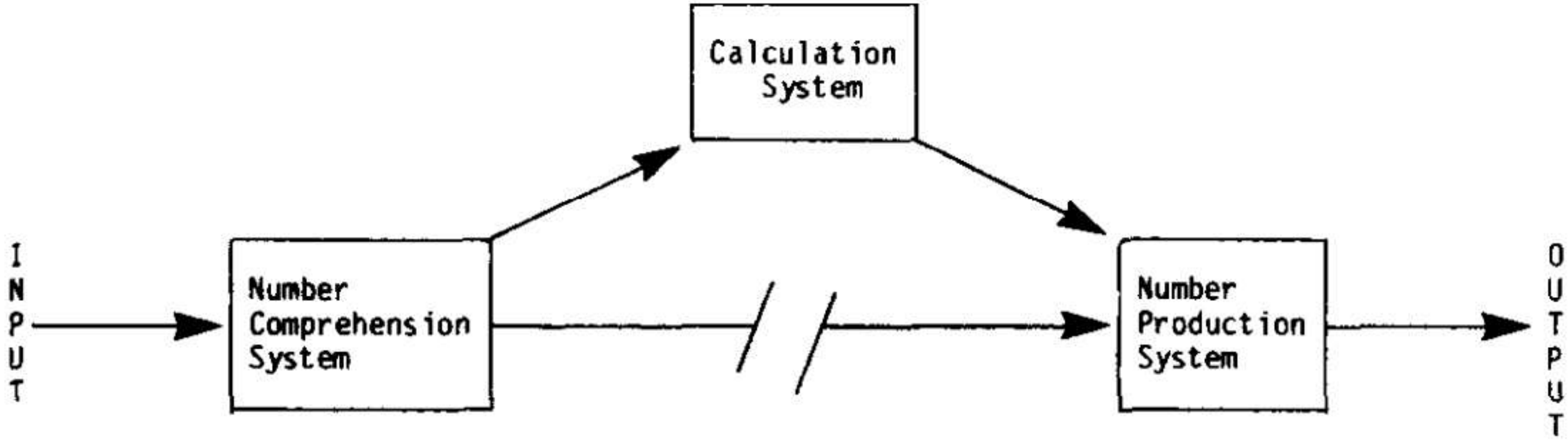


FIG. 1. Schematic representation of number-processing and calculation systems.

SOTTOSISTEMA DI COMPRENSIONE DEL NUMERO

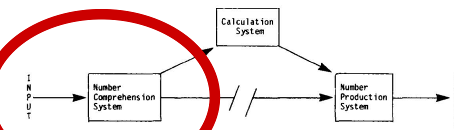


FIG. 1. Schematic representati of number-processing and calculation systems.

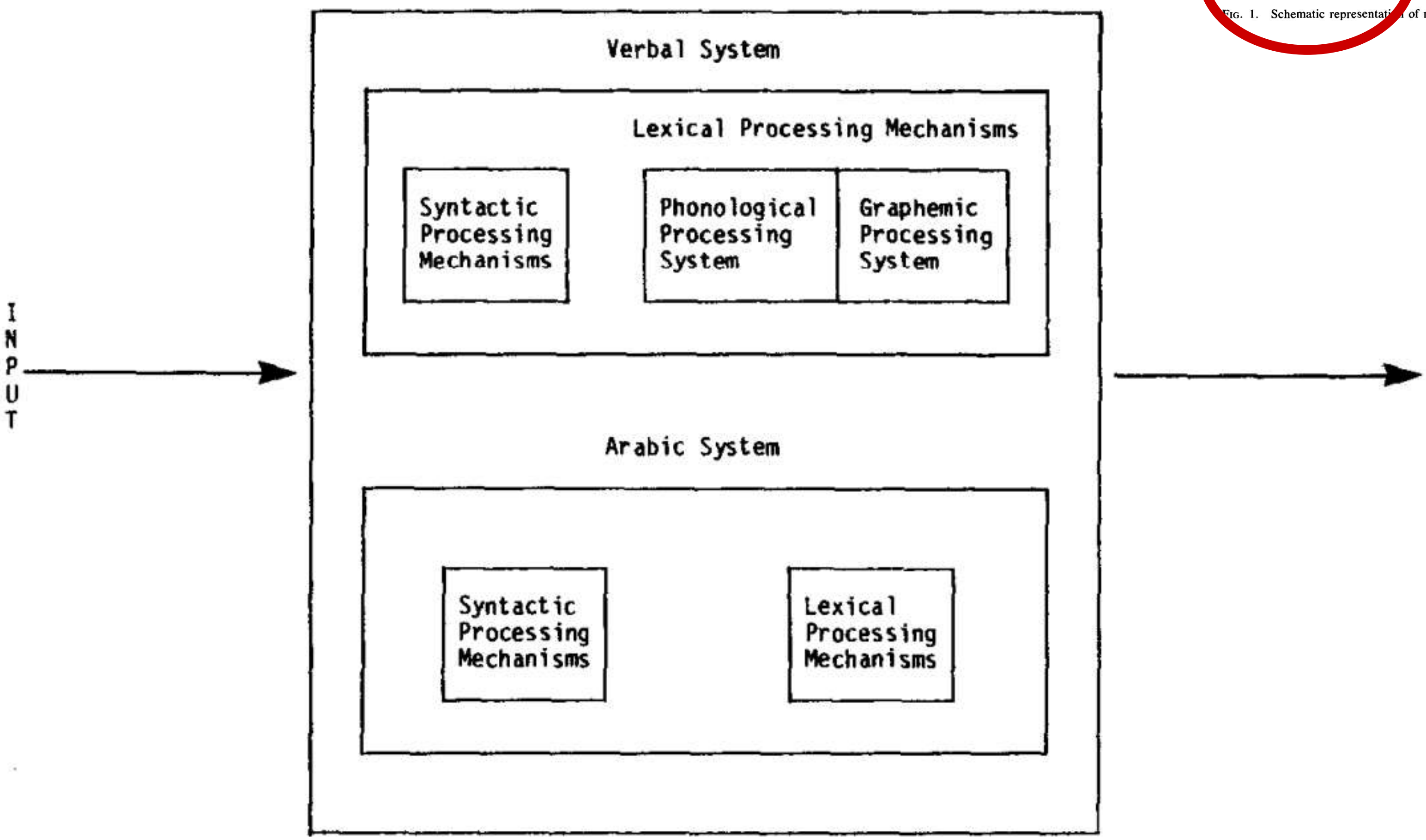


FIG. 2. Schematic representation of number-comprehension subsystem.

SOTTOSISTEMA DI PRODUZIONE DEL NUMERO

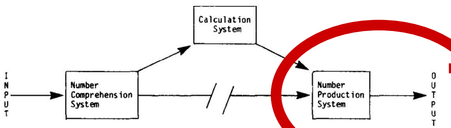


FIG. 1. Schematic representation of number-processing and calculation systems.

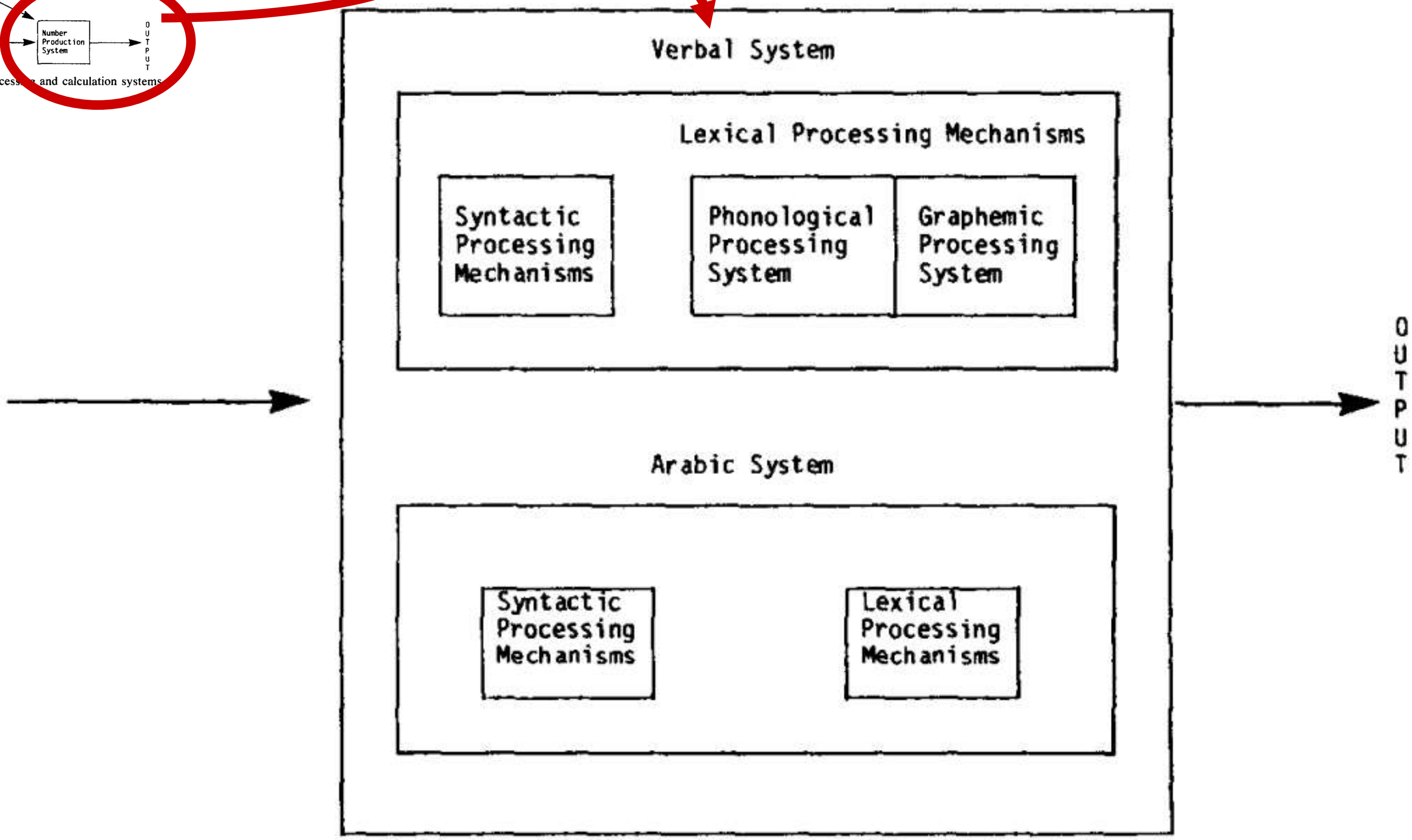


FIG. 3. Schematic representation of number-production subsystem.

NEL SISTEMA DI PROCESSAMENTO DEL NUMERO

Processamento del numero da/a una determinata forma:

- quattrocentotrentacinque (verbale scritto o parlato) o 435 (arabico)

Meccanismi **Lessicali**: riconoscimento o produzione dei singoli elementi (i nomi dei numeri)

Meccanismi **Sintattici**: relazioni tra gli elementi (p.es. valore posizionale del numero 3)

IL SISTEMA DEL CALCOLO

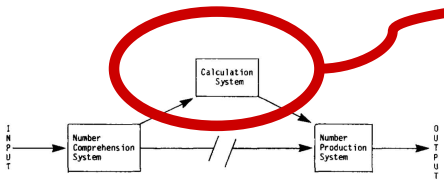


FIG. 1. Schematic representation of number-processing and calculation systems.

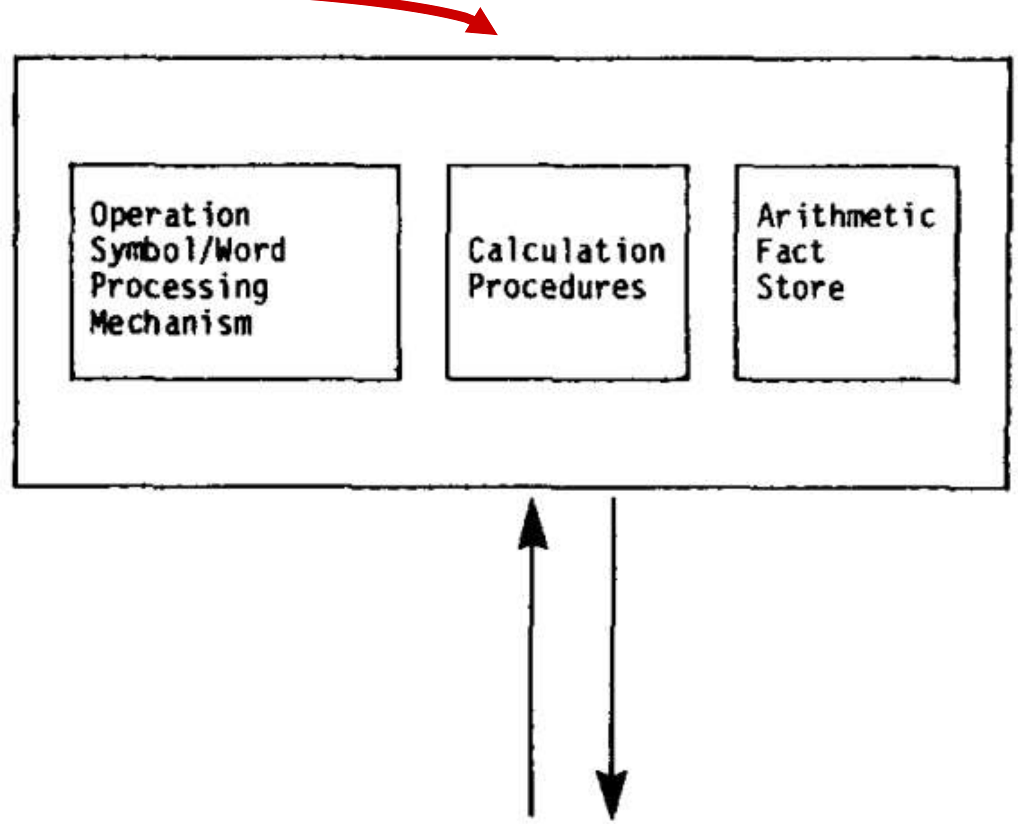
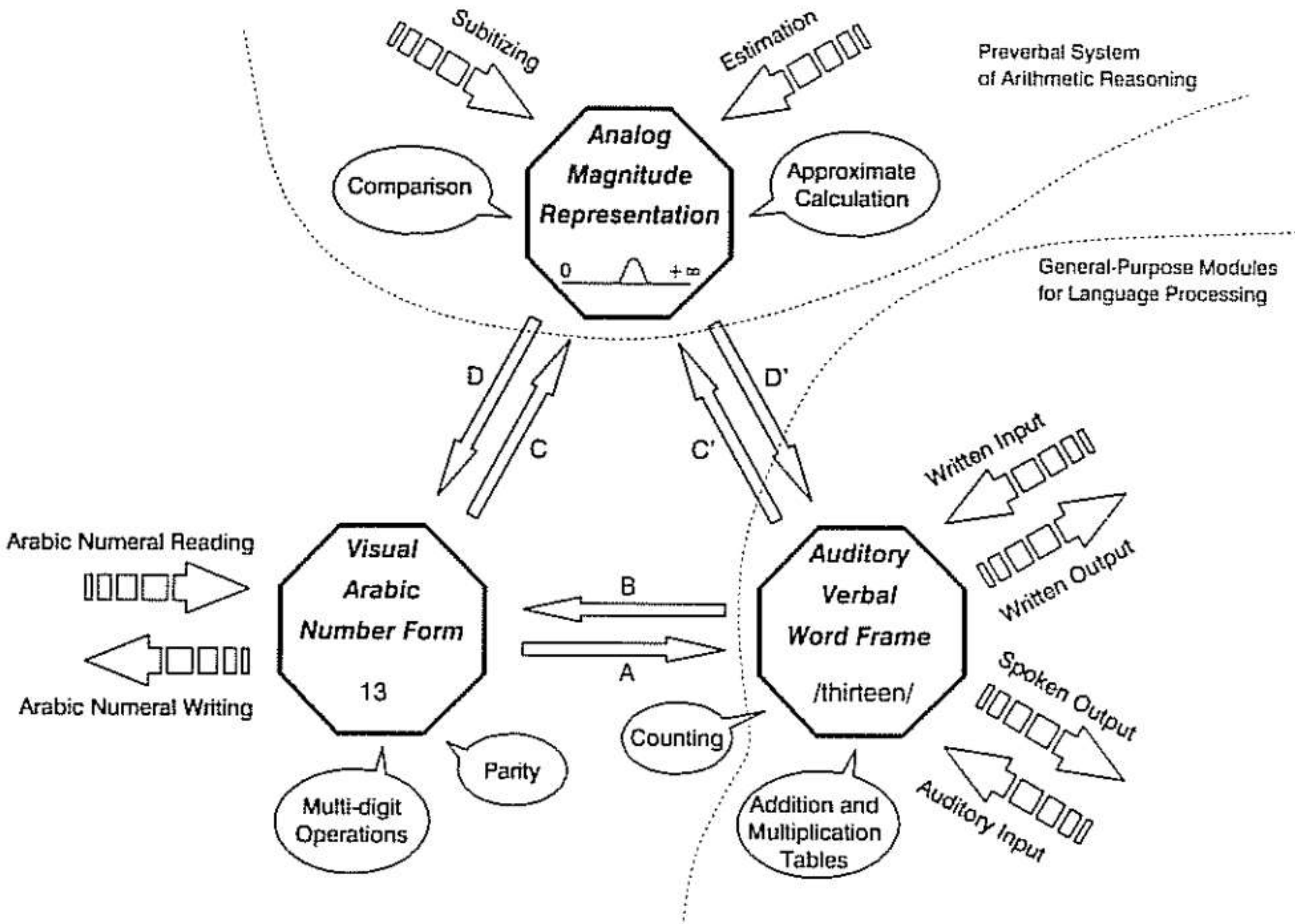


FIG. 4. Schematic representation of calculation system.

MODELLO DEL TRIPLO CODICE (DEHAENE)



TEST STANDARDIZZATI

Bin 4-6 (Molin, Poli, Lucangeli, scuola dell'Infanzia)

ACMT (Cornoldi, Lucangeli Bellina, 2002)

ABCA (Lucangeli, Tressoldi, Fiore, 1998)

BDE (Biancardi, Nicoletti, 2004)

- Ispirati a modelli teorici (McClosky, Dehaene
- Misurano correttezza e rapidità

BIN 4-6

Area lessicale

- Corrispondenza nome-numero (Conosci il numero 2? Qual è tra questi? 5 2 1)
- Lettura di numeri scritti in codice arabico (Guarda questo numero. Mi sai dire che numero è?)
- Scrittura di numeri (Sai scrivere i numeri? Scrivi il numero 3)

BIN 4-6

Area semantica

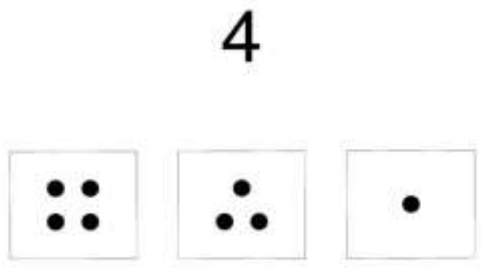
- Confronto tra quantità (Guarda i pallini disegnati e indica dove sono più pallini)
- Comparazione tra numeri arabici (con un foglio scritto 3 9, Mi sai dire tra questi numeri qual è di più?)

BIN 4-6

Area conteggio

- Enumerazione avanti e indietro
- Seriazione numeri arabici (metti in ordine)
- Completamento di seriazioni (scrivi quello che manca 1… 3 4 5)

BIN 4-6



Area presintassi

- Corrispondenza tra codice arabico - quantità
- Uno - tanti (Una mano è formata da tante… Tanti alberi formano un…..)
- Ordine di grandezza (metti in ordine i cestini)

AC-MT 6-10

Parte collettiva:

- operazioni scritte
- confronto di numerosità
- trasformazione in cifre
- ordinamento dal minore al maggiore
- ordinamento dal maggiore al minore

Parte individuale:

- calcolo a mente
- calcolo scritto
- enumerazione
- dettato di numeri
- recupero di fatti aritmetici

ABCA

calcolo aritmetico

- a mente,
- per iscritto

comprensione del numero

- denominazione e uso dei simboli aritmetici
- ordinamento di numeri (crescente e decrescente)
- confronto di numerosità
- riconoscimento del valore posizionale delle cifre

produzione di numeri

- enumerazione all'indietro
- scrittura di numeri sotto dettatura
- conteggio di pallini
- incolonnamento
- fatti aritmetici

CONFRONTO TRA TEST (TRESSOLDI)

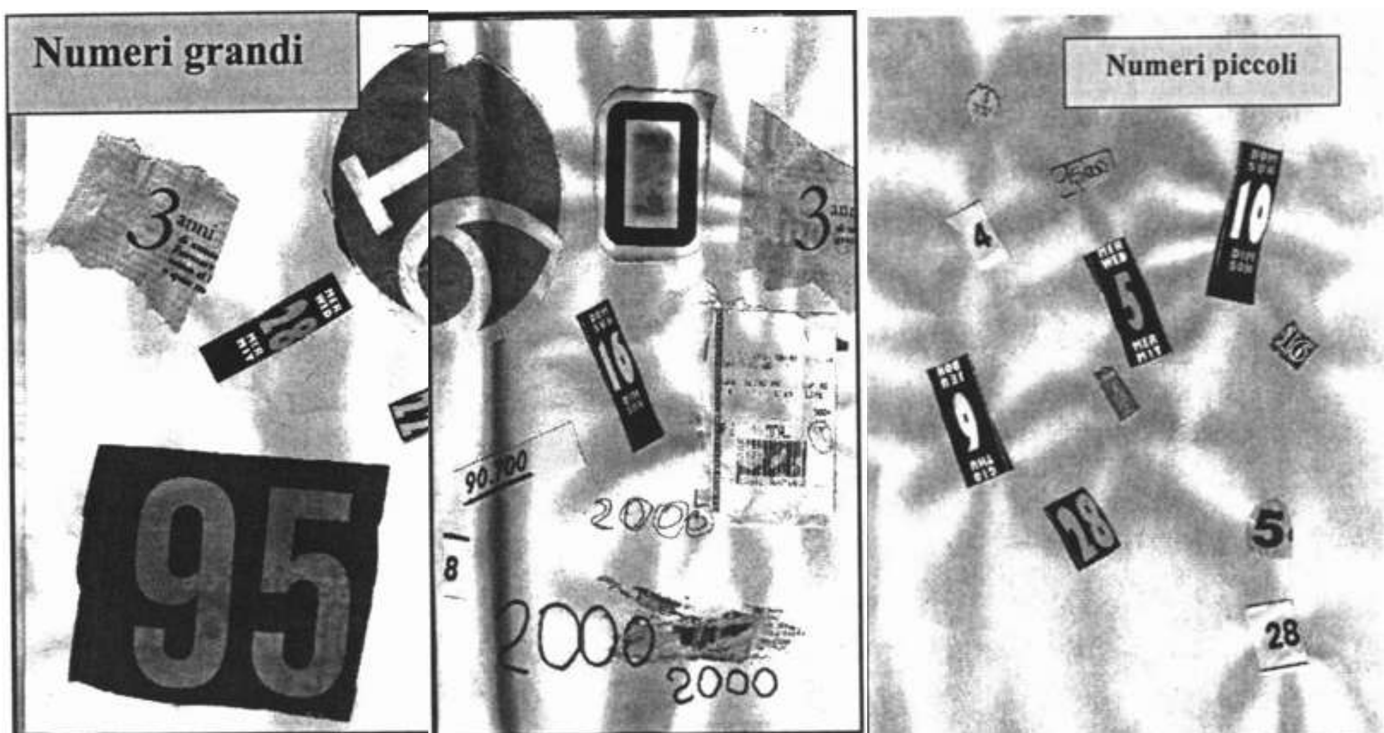
	ABCA	AC-MT	BDE	DISCALCULIA TEST
CONFRONTI DI QUANTITA'	V	V	V	V
LETTURA E SCRITTURA	V	V	V	V
CONTEGGIO	V			
RECUPERO TABELLINE o FATTI	V	V	V	V
CALCOLO MENTALE	V	V	V	V
CALCOLO SCRITTO	V	V	V	
ENUMERAZIONE	V	V	V	
VALORE POSIZIONALE	V	V		
INCOLONNAMENTO	V			
RIPETIZIONE DI NUMERI			V	
COMPRENSIONE SIMBOLI + - * :	V			

ALCUNE SPERIMENTAZIONI DIDATTICHE

NUMERI E INFANZIA

Quali le reali competenze dei bambini su numeri e operazioni all'arrivo alla primaria?

Ultimo anno scuola dell'infanzia: Cartelloni di "numeri grandi" e "numeri piccoli" con numeri tagliati da riviste (Infanzia e Matematica, p.53-57)



NUMERI E INFANZIA

Sperimentazione condotta all'inizio della prima primaria (a settembre), (Infanzia e Matematica, D'Amore)

- in un foglio A4: 3, 15, 327, 32, 51
  il 79% dei bambini riconosce correttamente il più piccolo e il più grande.
  Criterio indicato: il numero delle cifre
- fra 32, 51, 15:
  il 69% indica bene il più grande e 51% il più piccolo

Non conta solo il numero delle cifre, ma la prima cifra è più rilevante per determinare l'ordine di grandezza

Numero "non numero": 2000 (p. 77)

Numero "grande": nome lungo, con molte consonanti

MODELLI INTUITIVI

Importanza dell'esplicitazione dei modelli intuitivi

Valorizzare le competenze numeriche dei bambini, renderle patrimonio comune

Problemi-stimolo per favorire l'esplicitazione dei modelli intuitivi

- Come spiegheresti a bambini più piccoli … se fossi mamma e papà
- Fa' finta di essere un gelataio… il gelato costa 21 centesimi e il bimbo ti dà 12… (p. 60)

MEDIAZIONE SEMIOTICA

GLI «OGGETTI» DELLA MATEMATICA

Rispetto ad altre forme di conoscenza, la matematica ha una sua specificità:

gli oggetti che essa studia non sono accessibili percettivamente.

Gli oggetti matematici possono solo essere rappresentati all'interno di un registro semiotico, fatto di segni.

Essi mancano di un referente reale, e questa mancanza è colmata dall'esistenza di **moltissimi registri semiotici di rappresentazione**. (Duval, 1999)

GLI «OGGETTI» DELLA MATEMATICA

«un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici:

- **registro orale**, delle parole o delle espressioni pronunciate;
- **registro gestuale**;
- dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si **scrive** o si **disegna** (grafici, formule, calcoli, …), vale a dire, registro della scrittura».

Chevallard (1991)

Bambini, insegnante, sapere e… “Numeri colorati”.

Cosa possono essere per un allievo di classe prima?

L’insegnante “presenta” ai bambini quegli “oggetti”.

Ne risulta che all’oggetto matematico numero non corrisponde più solo un numerale (orale e scritto), ma anche una lunghezza ed un colore. Ad ogni singolo numero (ad esempio il 3) corrispondono varie rappresentazioni semiotiche, dunque:

- **il suono “tre” e la scrittura “tre”, all’interno di uno stesso registro**
- **la scrittura 3**
- **un determinato colore**
- **una determinata lunghezza.**

ESEMPIO DI OGGETTIVAZIONE: I NUMERI IN COLORE

Caleb Gattegno (1911-1988)

Alla relazione formale usuale nella didattica:

numero → numerale (orale e scritto)

si aggiungono due nuovi formalismi: colore e lunghezza.

Ne risulta una trasformazione di registri semiotici un po' complessa:

ABUSO DI RAPPRESENTAZIONI SEMIOTICHE

D'Amore B. (2002), *Basta con le cianfrusaglie!* "La Vita Scolastica" vol. 8, pp. 14-18.

oggetto matematico: numero

Un registro semiotico: lingua naturale

rappresentazione semiotica: orale

rappresentazione semiotica: scritto

Un altro registro semiotico: lingua aritmetica

rappresentazione semiotica: scrittura in cifre

Un altro registro semiotico: il colore

rappresentazione semiotica: regoli di diverso colore

Un altro registro semiotico: la grandezza

rappresentazione semiotica: regoli di diverse dimensioni

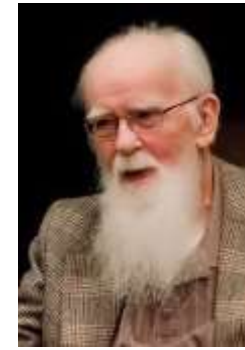
Un altro registro semiotico: disegno

rappresentazione semiotica: disegno dei regoli, delle coppie, degli schemi…

D'Amore B. (2002), *Basta con le cianfrusaglie!* "La Vita Scolastica" vol. 8, pp. 14-18.

SULL'UTILIZZO DI STRUMENTI

EFFETTO DIENES



Di fronte alle proposte di lavoro fatte dall'"esperto", l'insegnante si sente un tramite con l'allievo riproponendo in classe ciò che ha sentito proporre e lodare dall'esperto; in questo modo non si sente più responsabile dell'apprendimento dei propri allievi.

«Più l'insegnante sarà assicurato sulla riuscita da effetti indipendenti dal suo investimento personale e più egli otterrà insuccessi» (Brousseau, 1986).

Marazzani I. (2009). L'effetto Jourdain e l'effetto Dienes. Analisi delle radici ed effetti concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica. *La matematica* e *la sua didattica*. 3, 319-342.

NON ESISTONO BACCHETTE MAGICHE!!!

«…Lo stesso discorso si può fare relativamente a strumenti e strumentini che ancora qualcuno (forse in buona fede, ma solo per ignoranza scientifica) inventa e propone, accompagnati da sogni illusori basati sul nulla e legati alla facilità con la quale certi insegnanti si lasciano abbindolare da speranze create grazie a manufatti che promettono miracoli.

Strumenti così, semplicemente, non esistono, non possono esistere.

Recupero. Il che non vuol dire che non debbano essere usati in assoluto; si possono usare, basta essere consapevoli che non sono, che non possono essere, panacee.»

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. Difficoltà in Matematica. 11, 1, 89-109.

Dibattito nel 2018 sul metodo analogico (Camillo Bortolato):

http://www.umi-ciim.it/2018/03/15/comunicato-della-ciim/

https://www.repubblica.it/scuola/2019/01/16/news/matematici_contro_il_maestro_del_metodo_analogico-216684312/

https://www.ilfattoquotidiano.it/2018/03/16/come-si-insegna-la-matematica-e-questione-di-logica-o-di-pancia/4228316/

http://maddmaths.simai.eu/didattica/errori-lentezza/

https://youtu.be/JzEanWLaQBQ

CONTRO IL METODO ANALOGICO

http://maddmaths.simai.eu/didattica/il-metodo-bortolato/

Firmato da

- ricercatori in didattica della matematica

- membri del consiglio direttivo dell'AIRDM – Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica

Condiviso dalla CIIM Commissione Italiana per l'Insegnamento della matematica

L'articolo de La Repubblica del 24 febbraio scorso sul cosiddetto "Metodo Bortolato" o "analogico" ci ha molto colpito per il contrasto tra il prestigio del quotidiano su cui è stato ospitato e il taglio dell'articolo: articolo che acriticamente

(anche rispetto all'attualità di alcune questioni: l'insiemistica a livello di scuola primaria è da tempo superata, non è certo una novità recente)

e soprattutto senza far cenno a punti di vista diversi, promuove un metodo, molto diffuso anche per la potenza dell'editore, ma molto discusso nella comunità scientifica.

Questo intervento è motivato non da questioni accademiche (d’altra parte, come scritto nel pezzo, il maestro Bortolato non si occupa di ricerca), ma dalla profonda convinzione che su argomenti così importanti che possono influenzare l’educazione, e dunque il futuro dei nostri bambini, tutti (e in particolare i grandi mezzi di comunicazione) debbano procedere con la massima cautela.

Questo vale in particolare per l’insegnamento della matematica, materia ostica non solo ai bambini, ma anche a tanti maestri e maestre, che con tanta buona volontà, ma anche, spesso, con una storia di insuccessi in matematica e un rapporto difficile con la disciplina, potrebbero essere ben disposti verso un metodo che funziona e che fa amare la matematica a tutti i bambini, con poco sforzo.

E da qua partiamo: la matematica non sta nel biberon, come non sta nel biberon il linguaggio o il saper suonare uno strumento musicale.

La matematica è un costrutto culturale e il suo apprendimento/insegnamento richiede sforzo, sforzo che ovviamente può essere piacevole (e qui interviene la didattica). Convincersi del contrario secondo noi è molto pericoloso sia per gli insegnanti che per gli allievi.

A prescindere da questa considerazione, il divertirsi ad imparare è una bellissima cosa, un obiettivo importantissimo, che però deve essere collegato agli obiettivi formativi legati all'insegnamento della disciplina. È qui che il metodo analogico presenta i problemi più grossi.

Innanzitutto perché riduce il ruolo formativo dell’educazione matematica a livello di scuola primaria e pre-primaria al (pur importante) far di conto.

Un obiettivo molto limitato, che non solo contrasta con le Indicazioni Nazionali, ma anche con l’esperienza di tanti insegnanti di scuola dell’infanzia e primaria che portano avanti esperienze educative molto più complete riguardo alla matematica che il solo insegnare le tabelline.

Poi perché tale metodo è basato su tre aspetti, tra loro collegati, dal nostro punto di vista devastanti a livello educativo e lontanissimi dagli obiettivi fondamentali dell'apprendimento della matematica:

- l'abolizione delle spiegazioni, viste come un'inutile complicazione invece che l'educazione al voler sapere il perché delle cose in maniera a-gerarchica e all'imparare a difendere le proprie posizioni;

- l'attenzione focalizzata completamente sul risultato (il prodotto) piuttosto che sul processo di pensiero attivato per raggiungere un certo risultato;

- la costruzione di collegamenti puramente mnemonici basati su analogie senza nessun riferimento al concetto matematico.

Quest'ultimo punto è particolarmente importante, perché su questo è basata la percezione del successo del metodo: i bambini ricordano alcuni prodotti e danno le risposte giuste in processi meccanici.

D'altra parte, le cose imparate in questo modo, ovvero senza alcuna considerazione relativa ai perché e senza relazione ad altro sapere matematico, sono molto difficili da richiamare quando servono, in contesti leggermente diversi da quelli esatti in cui sono stati imparati (fenomeno del transfert noto nella ricerca educativa).

E allora siamo sicuri che un metodo che permette, nel migliore dei casi, di ottenere risposte giuste (prodotti) in contesti meccanici sia significativo per l'apprendimento della matematica?

Noi crediamo di no, crediamo che l'insegnamento della matematica, soprattutto nel primo ciclo (ma non solo) debba in primo luogo <u>insegnare il gusto di chiedersi e del cercare il perché delle cose, il gusto di argomentare le proprie posizioni in maniera coerente e articolata</u>, proprio come richiedono le Indicazioni Nazionali per l'insegnamento.

È un obiettivo educativo molto più complesso di insegnare a dare risposte corrette a domande pre-confezionate, ma, proprio per questo, molto più affascinante per insegnanti e allievi.

ESEMPI DI ATTIVITÀ

POSSIBILI ATTIVITÀ

Conte

- Conte in avanti e indietro
- Conta a partire da un certo numero
- Conta a salti (il personaggio sale la scala, ha fretta… poi scende)

Confronto di quantità:

- È più facile dire quale insieme contiene più elementi
- Forse perché è più familiare il "più" rispetto al "meno"
- Chiedere altrettanto anche "quale ha meno"?

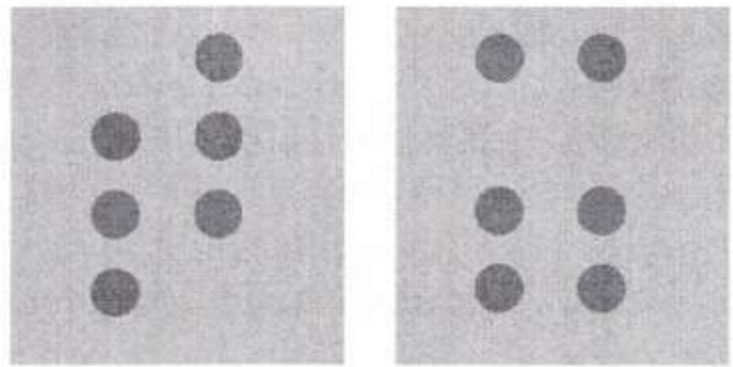
DOT CARDS

ATTIVITÀ 3.3 ✂

Obiettivo: Saper confrontare le numerosità di piccoli insiemi di oggetti.

Materiali: 12 *dot cards* (cfr. FIG. 3.5) suddivise in coppie. Le due carte di ogni coppia contengono lo stesso numero di puntini, ma disposti in modo diverso. Il numero di puntini varia da 1 a 6.

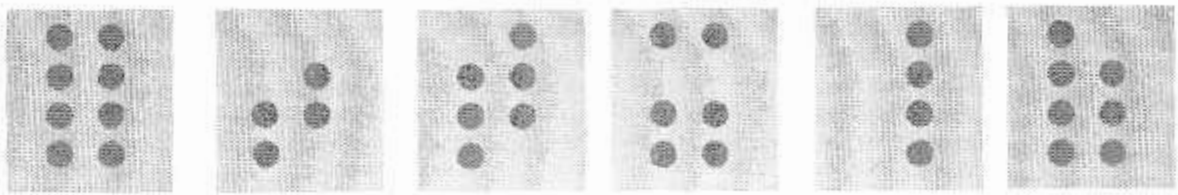
FIGURA 3.5



Svolgimento: Mettere le carte sul banco a faccia in giù. Il primo giocatore rovescia due carte a sua scelta. Se hanno lo stesso numero di puntini, il giocatore segna un punto; altrimenti le carte vengono rimesse a posto nuovamente a faccia in giù. Il turno passa poi al prossimo giocatore. Vince il giocatore che ha segnato più punti. Alcune varianti: 1) aumentare il numero delle carte usate; 2) aumentare il numero dei puntini; 3) appaiare una *dot card* a una carta con un numerale scritto.

Fonte: Way (2005).

FIGURA 3.7
Dot cards



ATTIVITÀ 3.4

Obiettivo: Acquisire relazioni di tipo spaziale tra i numeri.

Materiali: *Dot cards*; carte con dei numerali scritti; gettoni; piattini di plastica o altri recipienti.

Svolgimento: 1) Dare un piattino di plastica, dei gettoni e un numero adeguato di *dot cards* a ogni bambino. Mostrare una *dot card* e chiedere ai bambini di ricreare sul proprio piattino la figura che vedono. Chiedere quanti puntini vedono e anche come li vedono (le risposte ci daranno informazioni interessanti su come la cardinalità dell'insieme viene determinata). 2) Mostrare per un istante una *dot card*; si può chiedere ai bambini di dire a voce alta il numero, o di mostrare a loro volta una *dot card* con lo stesso numero di puntini, o ancora di costruire sul proprio piattino la medesima configurazione. 3) Può essere fatto anche l'esercizio inverso. Dire a voce alta un numero oppure mostrare una carta con un numerale. I bambini devono esibire la *dot card* corrispondente. 4) Mostrare un insieme di *dot cards* che rappresentano tutte lo stesso numero, tranne una. I bambini devono "trovare l'intrusa".

Fonte: Kolson *et al.* (2006).

ATTIVITÀ 3.5 ✂

Obiettivo: Costruire relazioni del tipo "uno in più, uno in meno, due in più, due in meno" entro la prima decina.

Materiali: Un set di tessere per il domino; un insieme di *dot cards*; gettoni; piattini di plastica.

Svolgimento: 1) I bambini giocano a un gioco del domino modificato: si possono affiancare due tessere non quando contengono lo stesso numero di puntini, ma quando una contiene un puntino in più (o in meno) dell'altra. Si può poi ripetere il gioco sostituendo la regola "uno in più o uno in meno" con la regola "due in più o due in meno". 2) Fornire a ciascun bambino un numero adeguato di gettoni e un piattino. Mostrare una *dot card* per qualche secondo. I bambini devono costruire sul piattino una configurazione che contiene due gettoni in meno di quelli contenuti nella *dot card*. Ripetere poi sostituendo la regola "due in meno" con la regola "due in più".

Fonte: Van de Walle, Lovin (2006).

GIOCHI CON LE DOTCARDS

1. Selezionare lo stesso numero di gettoni/bottoni, oggetti, dita, graffette, ecc. mostrato con la dotcard
2. Gettoni in un piatto/oggetti/dita → mettere altrettanti gettoni in un altro piatto
3. Si tira un dado, trovare la dotcard corrispondente
4. Mettere altrettanti gettoni/ metterne uno in più/uno in meno rispetto al dotcard
5. Dotcard mostrato e poi nascosto, scegliere lo stesso numero di oggetti
6. Trovare dotcard con lo stesso numero, ma disposizioni diverse
7. Dal dotcard al numerale scritto / parlato e viceversa
8. Più dotcard, trovare l'intruso (quantità diversa)
9. Memory
10. Mettere le dotcard in ordine crescente /decrescente
11. Quanto manca per?

GIOCHI CON LE DOTCARDS

Giochi di coppia:

Girano la carta in cima → chi ha più prende entrambe

Girano le due carte in cima → Totale – chi ha di più prende entrambe

Girano la carta in cima → se sono uguali chi lo dice prima, prende entrambe

LE OPERAZIONI

OPERAZIONI ED INSIEMI NUMERICI: LEGAME IMPRESCINDIBILE

N – Naturali {0,1,2,…}: addizione, moltiplicazione

Z – Interi {…,-2,-1,0,+1,+2,…} addizione, moltiplicazione, sottrazione

Q – Razionali (frazioni): addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione

R – Reali (razionali e irrazionali): addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione

ADDIZIONE

A scuola spesso esempi di tipo:

"2 cani e 3 gatti" trasformati in "5 animali"

MA:

"Si hanno in casa propria 5 animali se in essa si trovano 2 gatti e 3 topi? Se ne hanno 302 se si possiedono 2 cani che fra tutti e due hanno addosso 300 pulci?"

$\Rightarrow$ **ROTTURA DI SIGNIFICATO**

$\Rightarrow$ forzatura di oggetti disomogenei ad essere visti come omogenei

Non ci meravigliamo che qualche anno dopo questa iniziazione alle operazioni, i bambini trovano l'età del capitano, e poi qualche anno più tardi scrivono, senza rimorsi, che

$$2a + 3b = 5ab .$$

La questione è meno futile di quanto possa sembrare!

L’addizione e la sottrazione hanno senso SOLO se le due quantità/misure sono **OMOGENEE**:

3cm + 5cm

2 conigli + 3 conigli

35 alberi – 12 alberi

NO:

- Conigli con carote
- Pere con mele
- Lunghezza con area (Cm con cm^2)
- Ecc.

TRE ESEMPI – UN'OPERAZIONE

Gérard Vergnaud 1982:

3 problemi additivi, a una tappa (singola operazione)

A Intorno ad un tavolo ci sono 4 ragazzi e 7 ragazze. Quanti sono in tutto?

B Giovanni ha speso 4 franchi. Egli ha ora in tasca 7 franchi. Quanti franchi aveva prima?

C Roberto ha giocato due partite. Nella prima ha perso 4 punti, ma alla fine della seconda partita si è trovato in vantaggio di 7 punti. Che cosa è successo nella seconda partita?

La stessa soluzione: 4+7

Ma percentuali di successo diverse!!!

A Intorno ad un tavolo ci sono 4 ragazzi e 7 ragazze. Quanti sono in tutto?

A Quasi 100% già in 2° elementare

Coincidenza tra significato formale e intuitivo

B Giovanni ha speso 4 franchi. Egli ha ora in tasca 7 franchi. Quanti franchi aveva prima?

B Quasi nessuno dei risolutori di A (di 7 anni) lo risolve con consapevolezza.

4-5° elementare buona percentuale

C Roberto ha giocato due partite. Nella prima ha perso 4 punti, ma alla fine della seconda partita si è trovato in vantaggio di 7 punti. Che cosa è successo nella seconda partita?

C Insuccesso quasi totale!

Anche a 11-12 anni : 25%

Non è vero che il grado di difficoltà del problema è dato dal numero di operazioni / difficoltà delle operazioni da eseguire!!!

Resistenza all'uso dell'addizione in situazioni considerate **non di congruenza tra significato formale e intuitivo**.

+ difficoltà della gestione narrativa

SOTTRAZIONE

SOTTRAZIONE

Significati intuitivi:

- "togliere via" / diminuire (coincidenza tra significato formale e intuitivo)
- Confrontare scarto, confronto, distanza tra i due numeri
- "Completare" (riferimento all'addizione)

Rischio della formazione del misconcetto:

$a - b$ possibile sono se a è maggiore di b

(vero nei naturali, ma **NON** negli altri insiemi numerici)

Sottrazione come operazione inversa dell'addizione:

$a - b = c \quad \Leftrightarrow \quad b + c = a$

può essere $a > b$, $a = b$, $a < b$

SOTTRAZIONE

Due tipologie di domande:

1. Se togliamo 7 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?

2. Ho 7 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?

SOTTRAZIONE

1. Se togliamo 7 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?

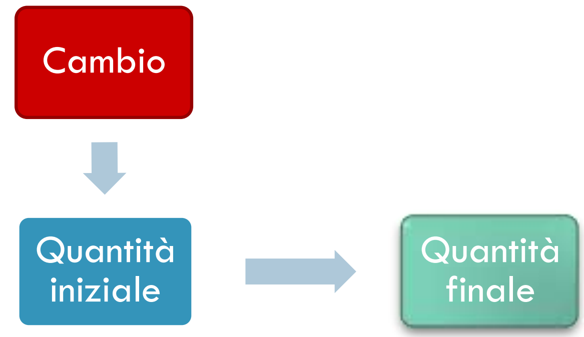
$10 - 7 = 3$

2. Ho 7 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?

$7 + ? = 10$

Molti fanno: 10+7
(addizione suggerita dalla parola "aggiungere").
Contrasto tra l'operazione ingenua di conteggio (+1+1+1 finché non ottengo 10)

SCHEMI ADDITIVI: (UNIONE)



Sandra ha 8 palline. Giorgio gliene dà altre 4. Quante palline ha Sandra in tutto?

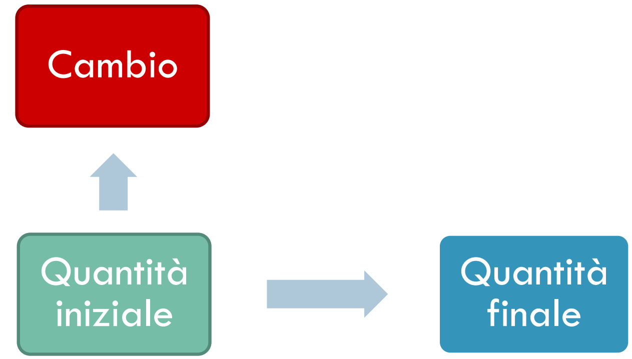
addizione

Sandra ha 8 palline. Giorgio gliene dà alcune in più. Adesso Sandra ne ha 12. Quante palline le ha dato Giorgio?

Sandra ha alcune palline. Giorgio gliene dà 4. Adesso Sandra ne ha 12. Quante palline aveva Sandra all'inizio?

sottrazione

SCHEMI ADDITIVI: (SEPARAZIONE)



Sandra ha 12 palline. Ne dà 4 a Giorgio. Quante palline ha Sandra adesso?

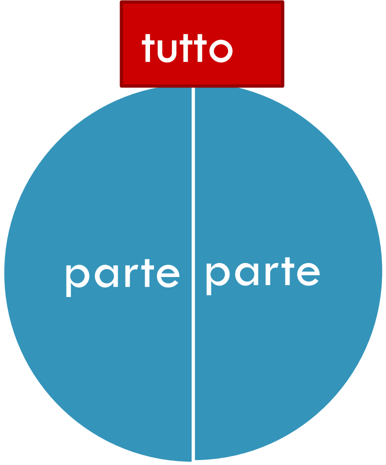
Sandra ha 12 palline. Ne dà alcune a Giorgio. Adesso Sandra ne ha 8. Quante ne ha date a Giorgio?

sottrazione

Sandra ha alcune palline. Ne dà 4 a Giorgio. Adesso Sandra ne ha 8. Quante palline aveva Sandra all'inizio?

addizione

SCHEMI ADDITIVI: (PARTE-TUTTO)



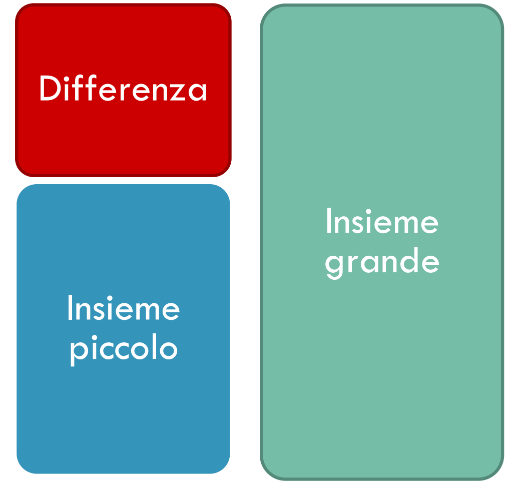
Giorgio ha 4 euro e Sandra 8 euro. Mettono insieme i loro risparmi in un salvadanaio. Quanti euro hanno messo nel salvadanaio?

addizione

Sandra e Giorgio mettono insieme i loro risparmi, 12 euro, in un salvadanaio. Giorgio ci ha messo 4 euro. Quanti euro ci ha messo Sandra?

sottrazione

SCHEMI ADDITIVI: (CONFRONTO)



Sandra ha 12 palline e Giorgio ne ha 8. Quante palline ha Sandra in più rispetto a Giorgio?

Sandra ha 4 palline in più rispetto a Giorgio. Sandra ne ha 12. Quante ne ha Giorgio?

sottrazione

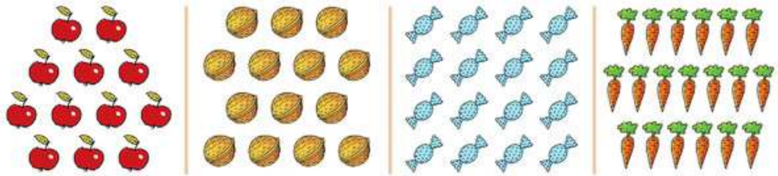
Sandra ha 4 palline in più rispetto a Giorgio. Giorgio ne ha 8. Quante ne ha Sandra?

addizione

1 ANNO – 2 QUADRIMESTRE

A SZÁMOK NAGYSÁGRENDJE

1 Számláld meg! Melyik a több? Mennyivel?



12

2 Színezz a számoknak megfelelően! Melyik a több? Mennyivel?

△△△△△△ □□□□□□ ♡♡♡♡♡ ○○○○○
△△△△△△ □□□□□□ ♡♡♡♡♡ ○○○○○
△△△△△△ □□□□□□ ♡♡♡♡♡ ○○○○○

16 15 13 12

3 Színezz ki annyi 1 Ft-ost, hogy igaz legyen! Töltsd ki a táblázatot!

	10	1
11 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)	1	1
12 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
13 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
14 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
15 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
16 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
17 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
18 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
19 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		
20 Ft = (10) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)		

4 Egészítsd ki a táblázatot!

1	2	3		5	6	7			
11	12		14				18	19	20

1 Végezd el a számításokat! Kösd a számegyenes megfelelő pontjához!

10−7 5+2 12+0 10+3 17−5 12+4 17+3

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

7−4 0+2 3+4 10−2 11+3 12+5 19−4

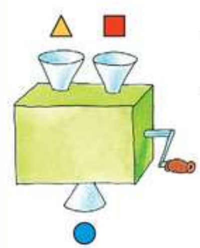
2 Pótold a hiányzó számokat!

15	17	19	14	18
10+5	12+	12+	10+	14+
12+	11+	17+	14+	17+
14+	16+	15+	13+	11+
11+	14+	14+	11+	18+
13+	15+	18+	12+	13+

3 Végezd el a műveleteket!

13 +2 → 15; −2 →
14 +3 →; −3 →
16 +4 →; −4 →
12 +1 →; −1 →
17 +3 →; −3 →

4 Mit csinál a gép? Keretezd be a helyes szabályokat! Töltsd ki a táblázatot!



△	6	4	3	7	10		16
■	12	11	11	12		12	
●	18	15			16	20	19

●+■=△ △+■=● △+●=■

●−△=■ ■−△=● ●−■=△

1 Igaz vagy hamis? Jelöld i vagy h betűvel!

9+6=15 i	3+9<12	9+7=12
8+5>11	8+8<14	9+9=18
4+9<10	7+8>13	6+5=13

2 Pótold a hiányzó számokat!
Minden téglában az alatta lévő két szám összege van.

2		5	
1	1	4	

18			
	9		
	4		
2		1	

3 Mely számokat jelölik a rajzok? Azonos ábra azonos számot jelöl.

🌺 + 🌺 = 8 🌺 = _
🌺 + 🔵 = 7 🔵 = _
🌺 + 🔵 + 🌼 = 12 🌼 = _

🍎 + 🍐 = 11 🍎 = _
🍎 + 🫐 = 9 🍐 = _
🍐 + 🫐 = 8 🫐 = _

4 Enikő születésnapi zsúrjára 6 fiút és 5-tel több lányt hívott.
Hány lányt hívott?

_ lányt hívott meg Enikő.

Hány vendéget hívott összesen?

_ vendéget hívott összesen.

5 A körben szereplő számok összege legyen egyenlő a kör alatti számmal!

6, 4, 5	7, 8	3, 1	5	8, 5	7
18	19	12	12	20	20

1 Írd be a hiányzó számokat!

16 −6→ 10 −3→ 7 (−9)
15 −_→ 10 −4→ _ (−_)
14 −_→ 10 −2→ _ (−_)
12 −_→ 10 −_→ 7 (−_)
13 −_→ 10 −_→ 5 (−_)
17 −_→ 10 −_→ _ (−8)

2 Töltsd ki a táblázatot a szabály alapján!

○+△=10
△+○=10

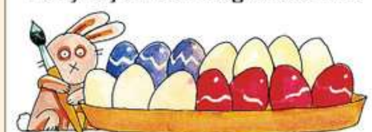
🟡	7	4	9	5	1			2	10
▲	3					8	6		

3 Állapítsd meg a szabályt, és töltsd ki a táblázatot!

♥	14	16	13	17			11	
■	4	6	3		2	9		8

■ =
♥ =

4 Nyúl Boldizsár a 14 tojásból hétfőn 4, kedden 3 tojást festett meg.
Hány tojást kell még kifestenie?



5 Pótold a hiányzó számot!

12−2−_=7	15−_−4=6	_−3−2=8
16−6−_=9	12−_−5=5	_−8−9=1
13−3−_=8	11−_−6=4	_−6−5=5
11−1−_=5	16−_−1=9	_−4−7=3
14−4−_=6	17−_−2=8	_−5−3=7

1. Completa i numeri mancanti! Osserva la relazione tra addizione e sottrazione!

2. Rendi vera!

3. Completa il segno di operazione mancante!

4. Quali sono i numeri mancanti? Completa la tabella secondo la regola!

5. Scrivi 4 operazioni in base al disegno.

1 Pótold a számokat! Figyeld meg az összeadás és a kivonás kapcsolatát!

8+ ___ =12	12−8= ___	8+ ___ =14	14−8= ___
4+ ___ =11	11−4= ___	7+ ___ =11	11−7= ___
5+ ___ =13	13−5= ___	6+ ___ =15	15−6= ___
9+ ___ =16	16−9= ___	8+ ___ =16	16−8= ___

2 Tedd igazzá!

8+4= 7+ ___	9+5= ___ −4	4+ ___ =12−7
16−8= 4+ ___	8+3= ___ −6	9+ ___ =20−4
9+7=20− ___	7+4=17− ___	___ +7=18−4
17−9=12− ___	12−5=11− ___	___ −2=12−5

3 Pótold a hiányzó műveleti jeleket!

2 ___ 3=5	6 ___ 9=15	17 ___ 6=11	6 ___ 9 ___ 2=17
6 ___ 2=8	7 ___ 6=13	12 ___ 3=15	8 ___ 4 ___ 7=11
3 ___ 4=7	9 ___ 4=13	11 ___ 5=16	9 ___ 2 ___ 5=16
7 ___ 5=2	5 ___ 7=12	14 ___ 2=12	7 ___ 2 ___ 8=13

4 Melyek a hiányzó számok? Egészítsd ki a táblázatot a megadott szabály szerint!

●=♥+♠+2

♥	4	5	7	9	7	6	11	9	5	13	3
♠	8	9	4	6	5	9	4	9	10	4	9
●	14										

5 Írj a képekről 4-4 műveletet!

MOLTIPLICAZIONE

SIGNIFICATO FORMALE E INTUITIVO

Nei Numeri naturali: introdotta come **addizione ripetuta**

- Ma: 5x7 e 7x5 visti come addizione ripetuta sono diversi:
- 7+7+7+7+7 e 5+5+5+5+5+5+5
- Non è immediata la commutatività

Allora si usano moltissimo gli "**schieramenti**" di oggetti per 5 file e 7 colonne

Pregi:

- Illustra bene la proprietà commutativa e quella distributiva
- Calcolo "rapido" specie se raggruppati per cinquine

Difetti >

MISCONCETTI

Nei numeri razionali la moltiplicazione:

- **NON È PIÙ UN'ADDIZIONE RIPETUTA‼**
- 1,235 * 0,042 non è più interpretabile come addizionare 1,235 a se stesso per 0,042 volte

Rischio della formazione del misconcetto:

La moltiplicazione accresce entrambi i fattori

(vero nei naturali, ma **NON** negli altri insiemi numerici)

MOLTIPLICAZIONE E LE UNITÀ DI MISURA

Mentre l'addizione e la sottrazione si può effettuare solo tra grandezze omogenee (stessa unità di misura), ciò non è vero per la moltiplicazione e la divisione!!!

Numero puro per Numero puro = numero puro

- $3 \times 5 = 15$
- "tre gruppi di *5* oggetti ciascuna"

MOLTIPLICAZIONE TRA NUMERI PURI E GRANDEZZE

Numero puro per Grandezza = Grandezza omogenea

- lunghezza del triplo di un segmento di 2cm:
- $3 \times 5\text{cm} = 15\text{cm}$

Grandezza per Grandezza = Grandezza non omogenea

- Camminata di 3 ore a 5km/h: $3\text{h} \times 5\ \text{km/h} = 15\ \text{km}$
- Area di un rettangolo di lati 3cm e 5cm:
  $3\text{cm} \times 5\ \text{cm} = 15\ \text{cm}^2$

Attenzione!!! Quest'ultimo caso non sempre ha senso:

- 15 euro x 3 euro

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE:

Spesso trattate in sequenza (prima la moltiplicazione e poi la divisione)

In realtà: fanno parte dello **stesso campo concettuale** (come addizione e sottrazione) >> Auspicabile un apprendimento integrato e coordinato

La stessa struttura logica dei problemi: a seconda dell'incognita si risolve con moltiplicazione o con divisione

DIVISIONE

DIVISIONE: SIGNIFICATI

Significati intuitivi:

- **"per contenenza":** quanti oggetti in un dato numero di gruppi uguali? (strategie di suddivisione)
- **"per ripartizione":** quanti gruppi di un certo numero di oggetti? (sottrazione ripetuta)

Divisione come operazioni inversa:

"fattore mancante": si cerca un numero che moltiplicato per b dà come risultato c

A volte i due significati intuitivi

- "per contenenza" (quanti oggetti in un dato numero di contenitori)
- "per ripartizione" (quanti contenitori con un dato numero di oggetti)

sono trattati come operazioni diverse!!!

NO!!!

Questi sono significati, situazioni "standard" da risolvere entrambe con l'operazione di divisione.

NON esiste la divisione per contenenza e la divisione di ripartizione.

Esiste la divisione e basta!

LA DIVISIONE: ASPETTI CONCETTUALI

La divisione non è sempre definita.

Dipende dall'insieme numerico in cui operiamo.

Può essere definita in un cosiddetto gruppo moltiplicativo (v. seguito)

Allora diremo che è l'operazione inversa della moltiplicazione, cioè:

$$a : b = c \quad \text{esattamente se} \quad b \times c = a$$

LA DIVISIONE: ASPETTI CONCETTUALI

G è un insieme

♥ un'operazione tra gli elementi dell'insieme G

(G,♥) è un gruppo se:

- G è **chiuso** rispetto a ♥ : a qualunque coppia di elementi di G viene associato l'elemento a ♥ b appartenente a G
- **Associatività**: (a ♥ b) ♥ c = a ♥(b ♥ c)
- Esistenza dell'**elemento neutro:** a ♥ e = a
- Esistenza dell'**inverso**: a ♥ b = b ♥ a = e

Nota: Non si chiede necessariamente la commutatività

I **numeri naturali** con **l'addizione** formano un gruppo?

- **NO!** Manca l'elemento inverso: $5 + ? = 0$
- L'operazione inversa: la sottrazione non è sempre definita in N (per esempio 9 - 11)
- Si introducono gli **interi relativi**… (Z)

I numeri **naturali** con la **moltiplicazione** formano un gruppo?

- **NO!** Manca l'elemento inverso: $3 \times ? = 1$
- L'operazione inversa: la divisione non è sempre definita in N (per esempio 3 : 2)
- Si introducono i **razionali**… (Q)

LA DIVISIONE CON RESTO

Nella pratica si introduce nei numeri naturali la cosiddetta **"divisione con resto"** o **"divisione euclidea"**

(Elementi VII, 1-2)

$$n : d = q \quad \text{con resto } r \qquad\qquad (n > d > r)$$

significa

$$n = q \times d + r$$

Esempio:

$$13 : 5 \; = 2 \text{ con resto di } 3$$

significa

$$13 = 2 \times 5 + 3$$

LA DIVISIONE CON RESTO

Allora eseguendo nei naturali le seguenti divisioni con resto

5 : 2 = **7 : 3 =** **21 : 10 =**

viene la stessa coppia di numeri **(2 con resto di 1)**…

Come numeri razionali risultano:

2,5 **2,33333…** **2,1**

Qual è il legame tra il quoziente razionale e

2 con resto 1 come "risultato" di una divisione con resto nei naturali?

LA DIVISIONE CON RESTO

Qual è il legame tra il quoziente razionale e

2 con resto 1 come "risultato" di una divisione con resto nei naturali?

operazione	**5 : 2 =**	**7 : 3 =**	**21 : 10 =**
quoziente	**2,5**	**2,33333…**	**2,1**
frazioni	**2** + **1**/2	**2** + **1**/3	**2** + **1**/10
resta 1 parte su:	**2**	**3**	**10 parti**

Per anni si opera in N

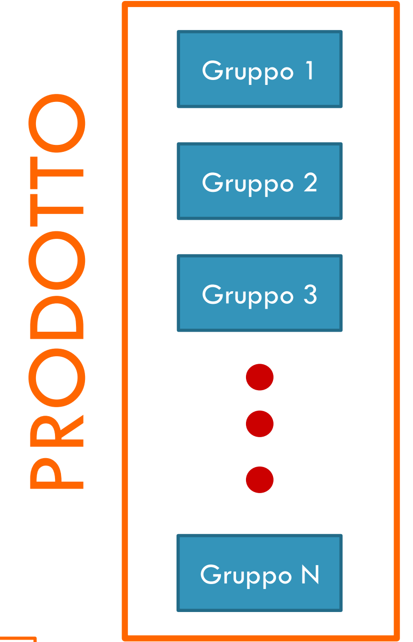
Ostacolo didattico:

"in una divisione A:B, il numero B deve essere minore del numero A."

In altre parole, ***"si può fare A:B solo se B<A"***

Ciò è vero in N, ma non negli altri insiemi numerici!!!

SCHEMI MOLTIPLICATIVI (GRUPPI UGUALI)



Marco ha 4 sacchetti di mele. In ogni sacchetto ci sono 6 mele. Quante mele ha Marco in tutto?

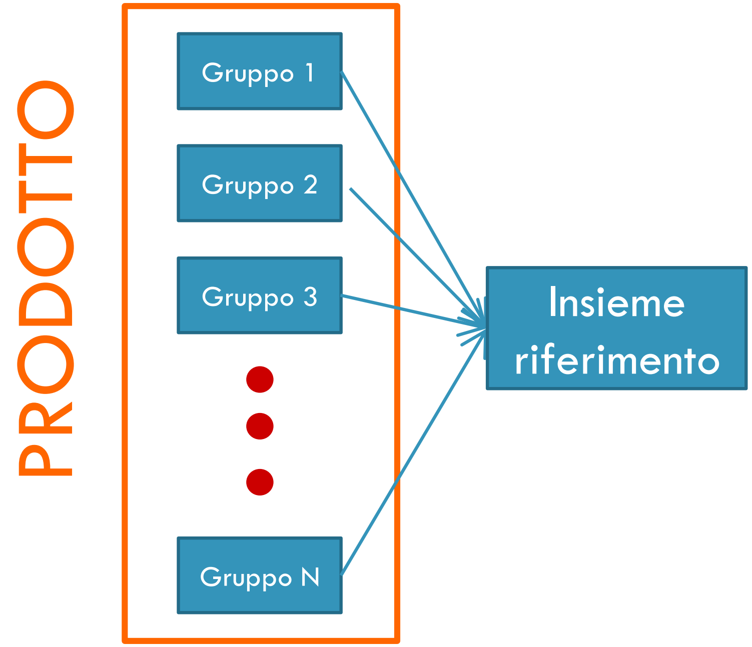
moltiplicazione

Marco ha 24 mele da distribuire in parti uguali ai suoi 4 amici. Quante mele riceverà ogni amico?

Marco vuole mettere le sue 24 mele in cassette di 6 mele ciascuna. Quante cassette userà Marco?

Divisione

SCHEMI MOLTIPLICATIVI (CONFRONTO MOLTIPLICATIVO)



Giulia ha 6 caramelle. Marco ha 4 volte le caramelle di Giulia. Quante caramelle ha Marco?

moltiplicazione

Marco ha 24 caramelle. Marco ha 4 volte le caramelle di Giulia. Quante caramelle ha Giulia?

Marco ha 24 caramelle, Giulia 6. Quante volte le caramelle di Giulia ha Marco?

Divisione

2 ANNO – 2 QUADRIMESTRE

Figyeld meg a szorzás és az osztás kapcsolatát!

15 tő virágot ültetünk virágosládákba, mindegyikbe ötöt.

Hány ládában lesz virág?

15 : 5 = 3

☐ ládában lesz virág.

3 virágosládába ültetünk virágokat, mindegyikbe ötöt.

Hány tő virágot ültetünk el?

3 · 5 = 15

☐☐ tő virágot ültetünk el.

Az osztást szorzással ellenőrizhetjük.

1 Írj minden képről osztást és szorzást!

20 : 4 = ☐ ☐ : ☐ = ☐ ☐ : ☐ = ☐

☐ · 4 = 20 ☐ · ☐ = ☐ ☐ · ☐ = ☐

2 18 kockából építs tornyokat! Hány tornyot építettél, ha egy torony magassága

- 6 kocka? 18 : 6 = ☐ Ell.: ☐ · 6 = 18
- 9 kocka? 18 : ☐ = ☐ Ell.: ☐ · ☐ = 18
- 3 kocka? 18 : ☐ = ☐ Ell.: ☐ · ☐ = 18

3 12 gyerek 2 csapatot alkot. Hányan vannak egy csapatban? Játsszátok el! Húzd alá az adatokat!

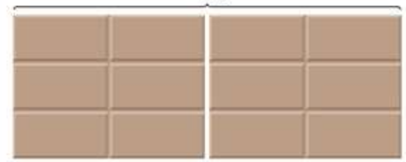
☐☐ : ☐ = ☐ Ell.: ☐ · ☐ = ☐☐ ☐ -an vannak egy csapatban.

4 30 könyvet raktunk fel 3 polcra, minden polcra ugyanannyit. Hány könyv van egy-egy polcon? Húzd alá az adatokat!

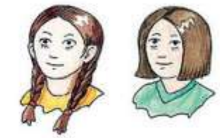
☐☐ : ☐ = ☐☐ Ell.: ☐☐ · ☐ = ☐☐ ☐☐ könyv van egy polcon.

1 Zsófi és Ildi a 12 kis részből álló csokit két egyenlő részre osztotta, vagyis **elfelezte.** Hány kis rész jutott nekik külön-külön?

12



6 6



12 / 2 = ☐

☐ kis rész jutott egy-egy lánynak.

Ez **az egész** csokinak a **fele.**

2 Színezd ki a négyszögek felét!

10 **fele** = 5

8 **fele** = ☐

12 **fele** = ☐

6 **fele** = ☐

4 **fele** = ☐

3 Egészítsd ki a rajzot a kétszeresére!

4 **kétszerese** = 8

5 **kétszerese** = ☐

10 **kétszerese** = ☐

2 **kétszerese** = ☐

6 **kétszerese** = ☐

4 Tamás 18 kókuszgolyót hozott. A fele megmaradt. Hány fogyott el?

5 Pótold a hiányzó számokat!

4	kétszerese → / ← fele	☐	9	kétszerese → / ← fele	☐	5	kétszerese → / ← fele	☐
☐	kétszerese → / ← fele	20	☐	kétszerese → / ← fele	6	☐	kétszerese → / ← fele	12

12 magyar és 15 külföldi bélyegem volt. A bélyegeim harmadát a barátomnak adtam. Hány darab bélyeget adtam a barátomnak?

I. II.

$(12 + 15) : 3 = \square\square$

$\square\square : 3 = \square\square$

$\square$ bélyeget adtam a barátomnak.

A zárójel módosíthatja a műveletvégzés sorrendjét.
Először mindig a zárójelben lévő műveletet kell elvégezni.

1. Végezd el a műveleteket! Számozással jelöld, milyen sorrendben számolsz!

$(14 + 13) : 3 = \square\square$	$9 + 7 \cdot 3 = \square\square$	$20 : 2 + 2 = \square\square$
$6 \cdot (22 - 19) = \square\square$	$(9 - 7) \cdot 3 = \square\square$	$20 : (2 + 2) = \square\square$
$40 : (12 - 8) = \square\square$	$12 + 8 : 2 = \square\square$	$9 \cdot (6 - 3) = \square\square$
$17 + 6 \cdot 4 = \square\square$	$(12 + 8) : 2 = \square\square$	$(13 - 4) \cdot 4 = \square\square$
$9 \cdot 3 + 59 = \square\square$	$(24 - 12) : 2 = \square\square$	$25 - 3 \cdot 4 = \square\square$
$24 + 12 : 4 = \square\square$	$24 - 12 : 2 = \square\square$	$90 + 6 : 2 = \square\square$
$39 - 6 \cdot 2 = \square\square$	$28 : (12 - 8) = \square\square$	$8 \cdot (42 - 39) = \square\square$

2. Betti és Dóri zsúrra várják a barátaikat. Minden tálcára 6 szalámis és 3 sonkás szendvicset tettek. Hány szendvics került 4 tálcára összesen?

3. Számolj! Mit veszel észre?

$(3 \cdot 3) + 2 = \square\square$	$4 \cdot (4 + 2) = \square\square$	$2 \cdot 4 + 1 = \square\square$
$3 \cdot (3 + 2) = \square\square$	$4 \cdot 2 + 2 = \square\square$	$2 \cdot (4 + 1) = \square\square$
$(2 + 3) \cdot 3 = \square\square$	$(4 + 2) \cdot 2 = \square\square$	$5 + 2 \cdot 4 = \square\square$
$2 + (3 \cdot 3) = \square\square$	$4 + 2 \cdot 2 = \square\square$	$(5 + 2) \cdot 4 = \square\square$

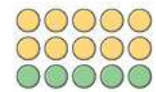
Édesanya minden sorba 4 tulipánt ültetett. 2 sorba pirosat, 3 sorba sárgát. Hány tulipánt ültetett összesen?

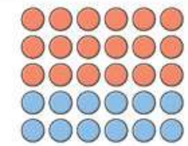
Számolhatunk így:
$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = \square\square$

Számolhatunk így is:
$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = \square\square + \square\square = \square\square$

$\square\square$ tulipánt ültetett összesen.

1. Számolj kétféleképpen!





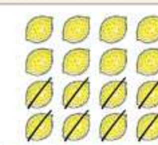
A gyerekek párosával sorakoznak. A 8 párból 5 párban lányok állnak, a többiben fiúk. Hány fiú van? Játsszátok el!

Számolhatunk így:
$8 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = \square\square - \square\square = \square\square$

Számolhatunk így is:
$(8 - 5) \cdot 2 = \square \cdot 2 = \square\square$

$\square\square$ fiú van.

2. Számolj kétféleképpen!



3. Pótold a hiányzó számokat!

$3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = \square \cdot 4$ $10 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = \square \cdot 3$ $18 : 2 - 12 : 2 = \square : 2$

4. Kösd össze az egyenlőket!

$4 \cdot 3 + 5 \cdot 3$ $5 \cdot 3 - 3 \cdot 3$ $5 \cdot 4$ $9 \cdot 4$

$6 \cdot 4 + 3 \cdot 4$ $2 \cdot 3$ $9 \cdot 3$ $9 \cdot 4 - 4 \cdot 4$

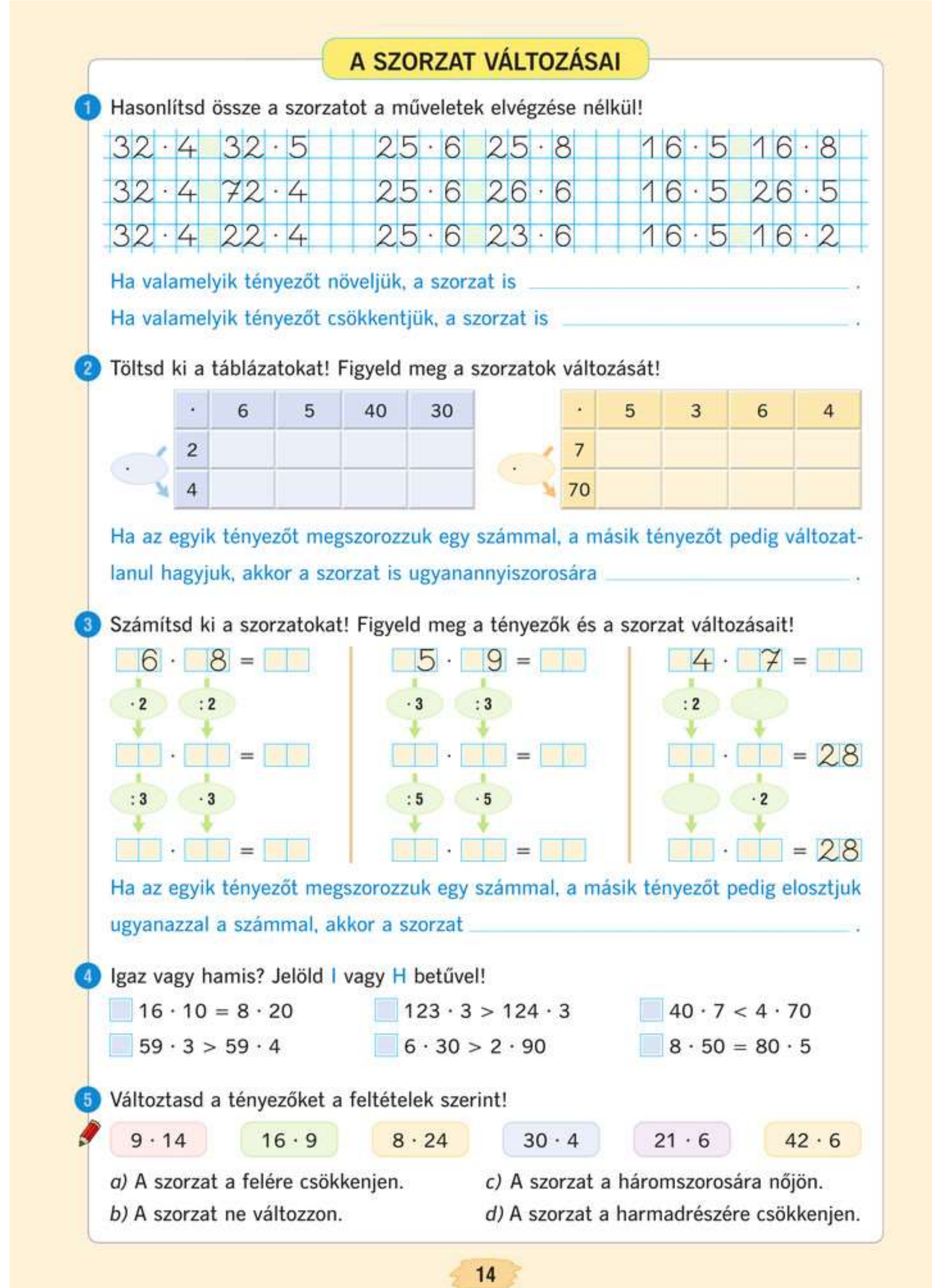
3 ANNO – 2 QUADRIM

Le variazioni del prodotto

1. Confronta il prodotto senza eseguire la moltiplicazione
2. Riempi la tabella. Osserva come cambia il prodotto!
3. Calcola le moltiplicazioni. Osserva i cambiamenti dei fattori e del prodotto!
4. Vero o Falso?

5. Cambia i fattori in modo che:

a) Il prodotto diventi la metà
b) Il prodotto non cambi
c) Il prodotto diventi il triplo
d) Il prodotto diventi un terzo



A SZORZAT VÁLTOZÁSAI

1 Hasonlítsd össze a szorzatot a műveletek elvégzése nélkül!

32 · 4	32 · 5	25 · 6	25 · 8	16 · 5	16 · 8
32 · 4	72 · 4	25 · 6	26 · 6	16 · 5	26 · 5
32 · 4	22 · 4	25 · 6	23 · 6	16 · 5	16 · 2

Ha valamelyik tényezőt növeljük, a szorzat is ______________.
Ha valamelyik tényezőt csökkentjük, a szorzat is ______________.

2 Töltsd ki a táblázatokat! Figyeld meg a szorzatok változását!

·	6	5	40	30
2				
4				

·	5	3	6	4
7				
70				

Ha az egyik tényezőt megszorozzuk egy számmal, a másik tényezőt pedig változatlanul hagyjuk, akkor a szorzat is ugyanannyiszorosára ______________.

3 Számítsd ki a szorzatokat! Figyeld meg a tényezők és a szorzat változásait!

6 · 8 = ___ ; : 2, : 2 ; ___ · ___ = ___ ; : 3, · 3 ; ___ · ___ = ___

5 · 9 = ___ ; · 3, : 3 ; ___ · ___ = ___ ; : 5, · 5 ; ___ · ___ = ___

4 · 7 = ___ ; : 2, ___ ; ___ · ___ = 28 ; ___, · 2 ; ___ · ___ = 28

Ha az egyik tényezőt megszorozzuk egy számmal, a másik tényezőt pedig elosztjuk ugyanazzal a számmal, akkor a szorzat ______________.

4 Igaz vagy hamis? Jelöld I vagy H betűvel!

☐ 16 · 10 = 8 · 20 ☐ 123 · 3 > 124 · 3 ☐ 40 · 7 < 4 · 70
☐ 59 · 3 > 59 · 4 ☐ 6 · 30 > 2 · 90 ☐ 8 · 50 = 80 · 5

5 Változtasd a tényezőket a feltételek szerint!

9 · 14 16 · 9 8 · 24 30 · 4 21 · 6 42 · 6

a) A szorzat a felére csökkenjen.
b) A szorzat ne változzon.
c) A szorzat a háromszorosára nőjön.
d) A szorzat a harmadrészére csökkenjen.

A SZORZAT BECSLÉSE

A farsangi díszítéshez piros, kék és sárga szalagokat használtunk. Körülbelül mennyi szalagra volt szükség az egyes színekből? Számold ki a táblázat adatainak a segítségével!

	piros	kék	sárga
szalag hossza	158 cm	179 cm	142 cm
száma	3 db	2 db	5 db

A szorzatot megbecsülhetjük úgy, hogy a szorzandó kerekített értékét és a szorzót összeszorozzuk.

SZÁZASOKRA kerekített értékkel:

158 · 3 ≈ 200 · 3 =

179 · 2 ≈ 200 · 2 =

142 · 5 ≈ 100 · 5 =

TÍZESEKRE kerekített értékkel:

158 · 3 ≈ 160 · 3 =

179 · 2 ≈ 180 · 2 =

142 · 5 ≈ 140 · 5 =

Számold ki a pontos szorzatot!

158 · 3 = 179 · 2 = 142 · 5 =

Hasonlítsd össze a pontos szorzatot a becsléssel!

1 Becsüld meg a szorzatokat százasokra és tízesekre kerekített értékekkel is!

	százasokra kerekítve	tízesekre kerekítve
218 · 3	200 · 3 = 600	220 · 3 = 660
467 · 2		
309 · 3		
174 · 4		
325 · 2		

2 Körülbelül hány forintot fizettek a gyerekek a képkeretekért? Tízesekre kerekített értékkel számolj!

Áron: 4 kis képkeret

Gabi: 1 közepes és 2 kis képkeret

Helga: 2 nagy képkeret

Ági: 1 nagy és 2 kis képkeret

KÉPKERETEK

kicsi	254 Ft
közepes	375 Ft
nagy	429 Ft

3 Kösd össze az összetartozókat!

≈ 550 ≈ 480 ≈ 960 ≈ 800

112 · 5 317 · 3 199 · 4 236 · 2

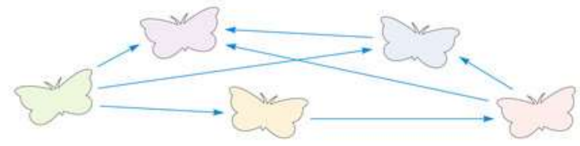
≈ 400 ≈ 900 ≈ 800 ≈ 500

1 A nyíl a nagyobb felé mutat. Írd a szorzatokat az ábrába!

115 · 5 317 · 3

218 · 3 147 · 2

209 · 4



2 *a)* Egy szál rózsa 126 forintba kerül. Noémi 3 szálat vásárolt az édesanyjának. Hány forintot fizetett?

b) Egy doboz nápolyi tömege 115 dkg. Nagyapa két doboz citromos és két doboz kakaós nápolyit vásárolt. Hány dekagramm nápolyit vett összesen?

c) Tavaly 216 gyerek jelentkezett a nyári táborba Siófokra. Az idén háromszor ennyi gyereket tudnak táboroztatni. Legfeljebb hány gyerek jelentkezhet ezen a nyáron?

3 Töltsd ki a táblázatot! Tízesekre kerekített értékekkel becsülj!

szorzandó	szorzó	becsült szorzat	szorzat
126	3		
215	4		
317	2		
224	3		

szorzandó	szorzó	becsült szorzat	szorzat
219	3		
435	2		
106	6		
117	5		

4 Mely számok teszik igazzá?

248 · 2 > ⬡ ⬡ :

127 · 3 < ▼ < 216 · 4 ▼ :

308 · 3 > ■ + 100 ■ :

5 Képezz háromjegyű számokat számjegyismétlődés nélkül a 4, 0, 3 számjegyek felhasználásával! (A háromjegyű számokban 0 nem állhat a százasok helyén.) Számold ki a számok kétszeresét!

6 *a)* Egy számhoz hozzáadtam önmagát, majd megszoroztam kettővel. A szám hányszorosát kaptam?

b) A 127-hez hozzáadtam a kétszeresét. Melyik számot kaptam?

c) Gondoltam egy számra, leírtam a tízszeresét, majd utána írtam a gondolt szám kétszeresét, így 204-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

CONCLUSIONI

NEI LIBRI DI TESTO:

Vengono proposte tantissime **operazioni senza contesto:** sviluppano meccanicismi senza consapevolezza dei procedimenti e senza significati sottostanti

Problemi **stereotipati** che usano il significato intuitivo "più immediato"

I problemi con la struttura di **unione**, **parte-tutto** vengono associati esclusivamente **all'addizione**

I problemi con la struttura di **separazione**, **confronto** vengono associati esclusivamente alla **sottrazione**

Rari i problemi "inversi", cioè: problema di unione da risolvere la sottrazione, problema di separazione con l'addizione, ecc.

Così le competenze saranno molto limitate!!!

NO A:

Esercizi tutti uguali – **monotonia anche matematica**

Associazione acritica tra operazione e parole chiave (rimangono = sottrazione; in tutto = addizione)

Esercizi "mascherati" da problemi (non è la presenza di testo che rende l'esercizio un problema)

Schemi e procedimenti da "imparare" senza lavoro sul significato e sulle motivazioni

SÌ A:

Varietà di contesti, situazioni e modalità applicative

Esercizi diretti e inversi (completamento)

Esercizi “simbolici” – “early algebra”

- Idea di “variabile”/ “incognita”
- Idea di relazione funzionale tra grandezze: macchinari “input-output”

Esercizi con più soluzioni possibili

Esercizi con più operazioni: osservazione e rinforzo del legame tra addizione e sottrazione

Stima del risultato di un’operazione

Teoria costruita dalle osservazioni operative negli esercizi e non fornita come conoscenza da memorizzare

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

https://padlet.com/judit_jasso/ic15

S. DEHAENE, *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*, Raffaello Cortina Editore, Milano 2010

D'Amore B. (a cura di) (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia*, Pitagora Ed.

F. Paoli, Didattica della matematica: dai tre agli undici anni, Carocci Ed. 2014

B.D'AMORE, *Elementi di Didattica della Matematica,* Pitagora, Bologna, 1999

C. R. Gallistel & Rochel Gelman, Preverbal and verbal counting and computation Cognition 44 (1-2):43-74 (1992)

Karen Wynn, Psychological foundations of number: numerical competence in human infants Trends in Cognitive Sciences 2 (8):296-303(1998)

K. Wynn Children's Acquisition of the Number Words and the Counting system, COGNITIVE PSYCHOLOGY 24, 220-251 (1992)

B. BUTTERWORTH , *Intelligenza matematica*, Rizzoli, Milano, 1999

B. BUTTERWORTH, *The Mathematical Brain*, MacMillan, London 1999

S. DEHAENE, Varieties of numerical abilities, Cognition 44 (1992), 1-42

McCloskey M, Caramazza A, Basili A., Cognitive mechanisms in number processing and calculation: evidence from dyscalculia. Brain Cogn. 1985 Apr;4(2):171-96.

L. Feigenson, S Dehaene, E. Spelke, Core systems of number, TRENDS in Cognitive Sciences Vol.8 No.7 July 2004

Marazzani I. (ed.) (2007). I numeri grandi. Trento: Erickson. 19-56. ISBN: 978-88-6137-054-8.

http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/esper/marazzani/numeri.htm

Baldazzi L. et al (tra cui D'Amore B.) (2007). Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all'aritmetica. In: Marazzani I. (ed.) (2007). *I numeri grandi*. Trento: Erickson. 19-56.